1 Esponenziale e logaritmo.

1.1 Risultati preliminari.

Prima di apprestarci a definire esponenziale e logaritmo enunciamo e dimostriamo alcuni risultati che verranno utilizzati in seguito.

Lemma 1 (Disuguaglianza di Bernoulli)

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

per ogni $\alpha \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

Lemma 2 (Disuguaglianza delle medie) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni n–upla $\{a_k\}_{1\leq k\leq n}$ di numeri reali positivi è verificata la seguente disuguaglianza*[1]

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n . \tag{1}$$

Lemma 3 *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi, si supponga inoltre che siano entrambe crescenti e superiormente limitate. Allora posto*

$$m_a := \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad m_b := \sup\{b_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \qquad m := \sup\{a_n \cdot b_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Si ha che $m = m_a \cdot m_b$.

La dimostrazione del primo lemma è un facile esercizio sul principio di induzione; passiamo dunque direttamente alla dimostrazione del secondo lemma, che risulta decisamente piu' complessa della precedente.

Dimostrazione Lemma 2 Sia $\mathcal{P}(n)$ il predicato

"l'equazione (1)è verificata $\forall$ n–upla $\{a_k\}_{1\leq k\leq n}$ di numeri reali positivi."

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{P}(n)$ è banalmente vera se $n = 1$ mentre per $n = 2$ si verifica immediatamente che

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Vorremmo procedere per induzione sul numero di elementi dell'n–upla, ovvero dimostrare che se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$. Purtroppo questo passaggio non è semplice e richiede un piccolo trucco: dimostreremo infatti che

(i) $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n)$.

(ii) Se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni $m \leq n$.

Quindi per passare da n a $n+1$ procederemo nel modo seguente:

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(2n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

dove la prima implicazione è vera grazie a (i) e la seconda grazie a (ii) unitamente al fatto che $2n \geq n+1 \quad \forall n \geq 1$.

[1] In genere questa disuguaglianza si trova scritta nella forma piu' espressiva:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

da cui il nome di disuguaglianza delle medie.

Per dimostrare (i) procediamo nella maniera seguente:

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)$$

quindi supposta $\mathcal{P}(n)$ vera otteniamo

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} a_{n+k}\right) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)\right]^n \tag{3}$$

ma, utilizzando la disuguaglianza (2) osserviamo che

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right) \leq \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k\right]^2$$

e sostituendo l'espressione trovata al secondo membro dell'equazione (3) terminaimo la dimostrazione del punto (i).

Dimostriamo allora (ii): supponiamo che $\mathcal{P}(n)$ sia vera, dato $m \leq n$ e data comunque una m-upla $\{a_k\}_{1\leq k\leq m}$ definiamo

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k, \qquad b_k = \begin{cases} a_k & k \leq m \\ \mu & k > m \end{cases} \tag{4}$$

Osservando che

$$\textstyle\prod_{k=1}^{n} b_k = \mu^{n-m} \prod_{k=1}^{m} a_k,$$

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \tfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k + (n-m)\mu\right) = \tfrac{1}{n}\left(m\mu + (n-m)\mu\right) = \mu$$

si verifica facilmente che applicando la disuguaglianza (1) all'n-upla $\{b_k\}_{1\leq k\leq n}$ si ottiene la disuguaglianza

$$\mu^{n-m} \prod_{k=1}^{m} a_k \leq \mu^n$$

quindi o $a_k = 0 \;\; \forall k$ (nel qual caso non c'e' nulla da dimostrare) oppure $\mu > 0$ e dunque dividendo entrambi i membri per la quantità (positiva!) μ^{n-m} e ricordando la definizione di μ otteniamo la tesi. #

Dimostrazione del lemma 3

Dimostreremo il lemma nel caso $m_a \cdot m_b > 0$ visto che altrimenti la tesi sarebbe banalmente verificata.

Il sup è un maggiorante e dunque $a_n \leq m_a$ e $b_n \leq m_b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi visto che si tratta di numeri positivi deduciamo che $a_n b_n \leq m_a m_b \; \forall n \in \mathbb{N}$. L'estremo superiore è per definizione il minimo dei maggioranti e dunque $m \leq m_a m_b$.

Per dimostrare la disuguaglianza opposta vedremo che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\; : \;\; a_n b_n \geq m_a m_b - \epsilon \tag{5}$$

da cui segue che $m_a + m_b$ è il minimo dei maggioranti e quindi coincide con m.

Definiamo $\epsilon' = \min\{\frac{\epsilon}{m_a+m_b},\; m_a,\; m_b\} > 0$; possiamo dunque scegliere n_1 ed n_2 in modo che

$$a_{n_1} \geq m_a - \epsilon' \quad \text{ e } \quad b_{n_2} \geq m_b - \epsilon'$$

quindi posto $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, visto che entrambe le successioni sono crescenti e ricordando come ϵ' è stato definito otteniamo

$$a_{n_0} b_{n_0} \geq (m_a - \epsilon')(m_b - \epsilon') \geq m_a m_b - \epsilon'(m_a + m_b) + (\epsilon')^2 \geq m_a m_b - \epsilon$$

ovvero (5) è verificata. #

Esercizi:

1. Si dimostri il lemma 1; si mostri inoltre che la disuguaglianza non è vera in generale senza l'ipotesi $\alpha \geq -1$ e si individui nella dimostrazione i passaggi in cui tale ipotesi viene utilizzata.

2. Si dimostri che la disuguaglianza delle medie si riduce ad un uguaglianza se e solo se gli a_n sono tutti uguali.

3. Si dimostri che il risultato del lemma (3) non è vero in generale qualora venga a mancare la crescenza o la positività della successione a_n.

4. Sia $A \subset \mathbb{R}^+_*$ e sia $B = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y = 1/x \text{ per qualche } x \in A\}$ allora valgono le seguenti relazioni:

$$\inf B = \begin{cases} \dfrac{1}{\sup A} & \text{se } \sup A < +\infty \\ 0 & \text{se } \sup A = +\infty \end{cases}$$

5. Dimostrare che

   (a) $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{\mu^2}(2\mu - x)$ per ogni $x, \mu \in \mathbb{R}^+$.

   *(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{n}{\mu}$ dove $\mu = (1/n)\sum_{k=1}^n a_k$ e $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ è una qualsiasi n–upla di numeri positivi.

   *(c) Più in generale se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è una funzione tale che[2]

   $$\forall \mu \in]a, b[\ \exists m \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \geq f(\mu) + m(x - \mu) \ \ \forall x \in]a, b[$$

   allora per ogni n–upla $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset]a, b[$ si ha

   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(a_k) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)$$

6. Dimostrare la disuguaglianza tra media geometrica e media armonica, ovvero che se $\{b_k\}_{1 \leq k \leq n}$ è una n–upla di numeri strettamente positivi allora

$$\left[\frac{n}{\sum_{k=1}^n (1/b_k)}\right]^n \leq \prod_{k=1}^n b_k.$$

   [Suggerimento: si ponga $a_k = (1/b_k)$ e si utilizzi la disuguaglianza (1).]

**7. Sia $\{a_k\}_{1 \leq k \leq n}$ una n–upla di numeri positivi e sia $\ell^n = \Pi_{k=1}^n a_k$. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq (1 + \ell)^n.$$

   [Suggerimento: si proceda per induzione adottando uno schema dimostrativo analogo a quello seguito nella dimostrazione del lemma 2.]

[2] Non è difficile dimostrare che questa condizione è equivalente a richiedere la convessità di f.

1.2 La funzione esponenziale.

Sia $a > 0$ fissato, si consideri la seguente applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{I\!R} \\ n & \longmapsto & a^n \end{array}$$

tale funzione manda $(\mathbf{Z}, +)$ in $(\mathrm{I\!R}, \cdot)$, trasformando somme in prodotti

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \forall\, x,\ y\ \in \mathbf{Z} \tag{6}$$

il nostro scopo sarà ora di **estendere** tale funzione a tutto $\mathrm{I\!R}$ in modo che la proprietà (6) sia verificata $\forall\, x,\ y \in \mathrm{I\!R}$.

La prenderemo un po' alla larga....

1.3 La funzione esponenziale in base naturale.

Sia $x \in \mathrm{I\!R}$, consideriamo la successione di polinomi definita da

$$p_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{dove } \ n \in \mathrm{I\!N}\ :\ n > |x|$$

Poniamo $E(x) \stackrel{def}{=} \sup\{p_n(x)\ :\ n > |x|\}$; per studiare le proprietà della funzione $E(x)$ procederemo per piccoli passi successivi:

(a) *Per ogni $x \in \mathrm{I\!R}$ fissato $\{p_n(x)\}_{n>|x|}$ è una successione crescente in n.*

Infatti posto

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 + \frac{x}{n} & 1 \le k \le n \\ 1 & k = n+1 \end{cases}$$

quindi, applicando la disuguaglianza delle medie agli $n+1$ numeri positivi α_k

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k\right)^{n+1} \ge \prod_{k=1}^{n+1} \alpha_k$$

cioè, sostituendo nella formula sopra l'espressione esplicita degli α_k otteniamo

$$p_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = p_n(x)$$

(b) *Per ogni $x \in \mathrm{I\!R}$ fissato p_n è superiormente limitata.*

Infatti si ha

$$p_n(x) \cdot p_n(-x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

e dunque

$$0 < p_n(x) \cdot p_n(-x) < 1 \quad \forall\ n > |x| \tag{7}$$

ora, visto che $p_n(-x)$ è crescente, posto $n_0 = \min\{n \in \mathrm{I\!N}\ :\ n > |x|\}$ avremo che

$$p_n(-x) \ge p_{n_0}(-x) \qquad \forall n \ge n_0$$

da cui, tenendo anche conto dell'equazione (7), si ottiene

$$p_n(x) \le \frac{1}{p_n(-x)} \le \frac{1}{p_{n_0}(-x)}. \tag{8}$$

da cui la tesi. Osserviamo che la disuguaglianza (8) implica che $E(x) \le \dfrac{1}{p_{n_0}(-x)}$.

(c) $E(x)\cdot E(-x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti

$$\begin{aligned} E(x)\cdot E(-x) &= \left(\sup_{n>|x|} p_n(x)\right)\cdot\left(\sup_{n>|x|} p_n(-x)\right) \\ &= \sup_{n>|x|} \{p_n(x)\cdot p_n(-x)\} = \sup_{n>|x|} \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

ma quest'ultimo sup vale 1 visto che[3]

$$1 \geq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{x^2}{n} \qquad \forall n > |x|.$$

(d) $E(x)\cdot E(y) = E(x+y) \qquad \forall x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

Siano $x, y\ \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\begin{aligned} E(x)\cdot E(y) &= \left(\sup_{n>|x|} p_n(x)\right)\cdot\left(\sup_{n>|y|} p_n(y)\right) = \sup_{n>|x|+|y|} p_n(x)\cdot p_n(y) = \\ &= \sup_{n>|x|+|y|} \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n \end{aligned} \tag{9}$$

se ora supponiamo che $x\cdot y \geq 0$ dall'equazione precedente si deduce che

$$E(x)\cdot E(y) \geq E(x+y)$$

e, visto che anche $(-x)\cdot(-y) \geq 0$, si avrà pure

$$E(-x)\cdot E(-y) \geq E(-(x+y))$$

da cui, passando ai reciproci e tenendo conto del punto (c) si ottiene che

$$E(x)\cdot E(y) \leq E(x+y)$$

e dunque $E(x)\cdot E(y) = E(x+y)$.
Per dimostrare che la formula appena provata vale anche per gli $x,\ y$ tali che $xy \leq 0$ (e quindi $\forall\ x,\ y\ \in \mathbb{R}$) si procede in modo identico, con la sola differenza che tutte le disuguaglianze risulteranno invertite.

Utilizzando i punti (a), (b), (c) e (d) è facile verificare che la funzione $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ gode delle seguenti proprietà:

(i) $E(0) = 1$;

(ii) $E(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(iii) $E(1) := \mathbf{e} > 2$, ($\mathbf{e}$ è detta la costante di Nepero);

(iv) $E(x+y) = E(x)\cdot E(y) \quad \forall\ x,\ y\ \in \mathbb{R}$.

tale funzione si chiama esponenziale in base naturale.

[3] La seconda disuguaglianza è conseguenza della formula di Bernoulli 1.

Esercizi:

1. Utilizzando le proprietà (iii) ed (iv) dimostrare che
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} E(x) = 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} E(x) = +\infty. \tag{10}$$

2. Dimostrare (per induzione) che
$$[E(x)]^n = E(nx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

3. Si dimostri che la funzione esponenziale è strettamente crescente (e quindi anche iniettiva). [Suggerimento: si sfrutti la proprietà (iv) dell'esponenziale.]

4. Si dimostri che
$$\frac{E(x) + E(-x)}{2} \geq 1$$

1.3.1 Una disuguaglianza fondamentale.

Dalla disuguaglianza di Bernoulli discende subito che
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x \qquad \forall n > |x|$$
e di conseguenza, passando al sup su n,
$$E(x) \geq 1 + x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$
questa equazione ha una ovvia interpretazione grafica (Fig. 1).

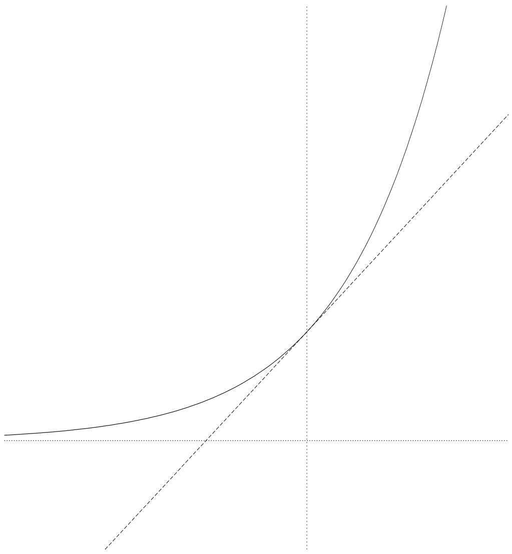


Figura 1: I grafici $y = E(x)$ e $y = 1 + x$.

Esercizio:
Dimostrare che (11) implica che $E(x) < \dfrac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$

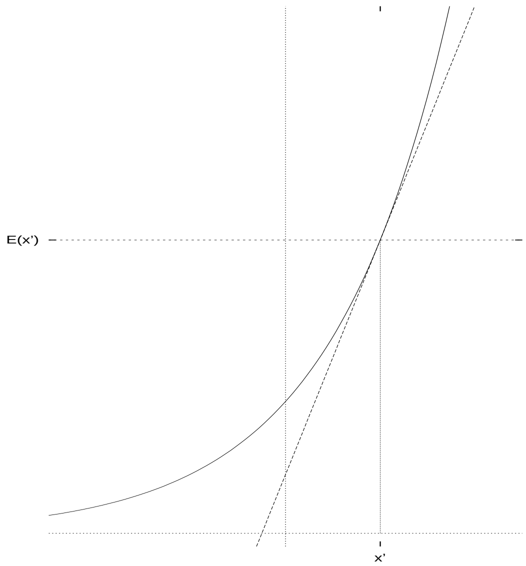


Figura 2: I grafici $y = E(x)$ e $y = E(x')(1 + x - x')$.

La disuguaglianza trovata sopra assieme alla proprietà (iv) dell'esponenziale ci permettono di dire anche che

$$\begin{aligned} E(x) &= E(x-x')E(x') \\ &\geq E(x')(1+x-x') \qquad \forall\, x,\ x' \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12}$$

Anche questa disuguaglianza ammette una ovvia interpretazione grafica (Fig. 2).

L'equazione (12) che abbiamo ora trovato ci permette di dedurre altre importanti proprietà dell'esponenziale:

a) *La funzione esponenziale è lipschitziana sugli intervalli del tipo* $]-\infty, a]$ *per ogni* a *reale.*

   Infatti per (12) si ha che $\forall x, x' \in (-\infty, a]$

   $$E(x) \geq E(x') + E(x')(x - x') \geq E(x') - M|x - x'| \quad \text{con } M = E(a)$$

   Di conseguenza $E(x') - E(x) \leq E(a)|x - x'| \quad \forall\, x,\ x' \in]-\infty, a]$ e quindi scambiando i ruoli tra $x,\ x'$ otteniamo che $|E(x) - E(x')| \leq E(a)|x - x'| \quad \forall\, x,\ x' \in]-\infty, a]$.

b) *L'immagine dell'esponenziale è* $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

   Dal risultato precedente è chiaro che la funzione esponenziale risulta localmente lipschitziana e quindi continua, pertanto assume tutti i valori compresi tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Visto che $E(n) > 1 + n$ è chiaro che E non è superiormente limitata cioé $\sup E = +\infty$; similmente visto che $0 < E(-n) = 1/E(n) \leq 1/(1 + n)$ si deduce che $\inf E = 0$.

c) *L'esponenziale è una funzione convessa*[4].

   Infatti se $x,\ y \in \mathbb{R}$ e $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ allora si ha

   $$\left.\begin{array}{l} E(x) \geq E(z)(1 + x - z) \\ E(y) \geq E(z)(1 + y - z) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \geq E(z)(1 + \lambda x + (1 - \lambda)y - z)$$

   cioé $\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \geq E(\lambda x + (1 - \lambda y))$ ovvero E è convessa.

[4]In generale, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, è vero che f è lipschitziana su tutti gli intervalli $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1.4 La funzione logaritmo.

Nella sezione precedente abbiamo dimostrato che la funzione esponenziale in base naturale è bigettiva se come codominio prendiamo la sua immagine $\mathbb{R}^+$. Quindi essa ammette un'inversa $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Dalle proprietà (i)–(iv) dell'esponenziale ricaviamo:

(i)' $\ln(1) = 0$;

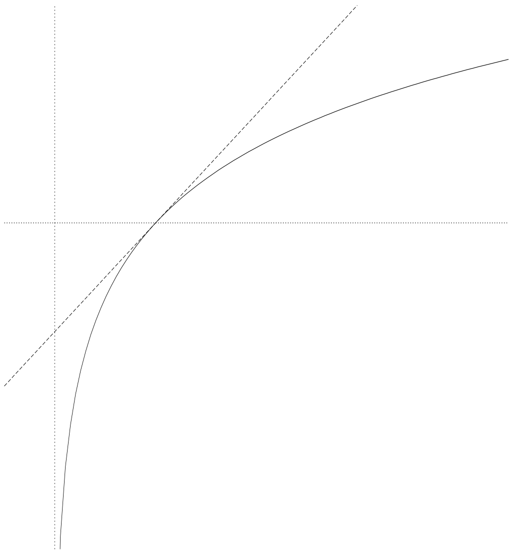
(ii)' $\ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$;

(iii)' $\ln(\mathbf{e}) = 1$;

(iv)' $\ln(z) + \ln(w) = \ln(zw)$;

Inoltre da (11) segue che

$$\ln(w) \leq w - 1 \qquad \forall w > 0 \tag{13}$$



anzi, vale più in generale che

$$\ln(z) = \ln(\frac{z}{w}) + \ln(w) \leq \frac{z}{w} - 1 + \ln(w)$$

da cui si deduce facilmente che

$$|\ln(z) - \ln(w)| \leq \frac{1}{\delta}|z - w| \qquad \forall\ z,\ w\ \in [\delta, +\infty[.$$

Esercizi:

1. Si dimostri che per $\forall\ |x| < 1$ vale la seguente stima[5]

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Ne si deduca che

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[5]Sugg: la disuguaglianza di destra è sostanzialmente la disequazione (13)...

2. Si utilizzi il risultato precedente per provare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

3. Si dimostri che il logaritmo è una funzione concava, ovvero

$$\ln(tx+(1-t)y) \geq t\ln x + (1-t)\ln y \quad \forall\ t \in [0,1]\ \ x,y>0$$

1.4.1 La radice n–esima.

Utilizzando esponenziale e logaritmo possiamo agilmente definire la funzione radice n–esima di un numero positivo ponendo

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[n]{\cdot}\ :\ \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} := \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ E(\frac{1}{n}\ln x) & \text{se } x>0 \end{cases} \end{array}$$

Utilizzando la proprietà (iv) dell'esponenziale si verifica facilmente (procedendo per induzione) che

$$(\sqrt[n]{x})^n = \left[E\left(\frac{1}{n}\ln x\right)\right]^n = E(\ln x) = x$$

come c'era da aspettarsi.
Esercizi:

1. Provare che, se $y>0$ è tale che $y^n = x$ allora $y = \sqrt[n]{x}$.
2. La funzione radice n–esima poteva essere anche costruita nel modo seguente: dato $x \geq 0$ si definisce

   $$r_n(x) = \sup\{y \in \mathbb{R}^+\ :\ y^n \leq x\}.$$

   Dimostrare che, $[r_n(x)]^n = x$ e quindi, grazie al risultato dell'esercizio precedente, $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$.
3. Dimostrare che, se n è dispari, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un **unico** $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^n = x$ (quindi la funzione radice n–esima può essere definita su tutto $\mathbb{R}$ se n è dispari).

1.5 L'esponenziale e il logaritmo in base qualunque.

Sia $a \in \mathbb{R}^+$ siamo ora in grado di definire a^x $\forall x \in \mathbb{R}$ in modo che a^n quando $n \in \mathbf{Z}$ sia il solito elevamento a potenza. Infatti basta definire

$$a^x \stackrel{def}{=} E(x\ln a).$$

Quindi in particolare $\mathbf{e}^x = E(x)$. È facile verificare per induzione[6] che se $x \in \mathbf{Z}$ tale definizione coincide con quella usuale; inoltre con tale definizione la proprietà (6) è verificata su tutto $\mathbb{R}$.

È facile ricavarsi la anche la seguente formula (già nota nel caso x, y fossero interi)

$$(a^x)^y = \mathbf{e}^{y\ln(a^x)} = \mathbf{e}^{y\ln\left(\mathbf{e}^{x\ln a}\right)} = \mathbf{e}^{xy\ln a} = a^{xy} \quad \forall\, x,\, y\ \in\ \mathbb{R}.$$

È immediato verificare che a^x è bigettiva se considerata come funzione da $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qunidi risulta invertibile. La sua inversa, che chiamiamo logaritmo in base a è una funzione $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e soddisfa

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a^{(\log_a y)} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$$

[6] Si dimostri per induzione che le definizioni coincidono su $\mathbb{N}$ e poi si sfrutti il fatto che $E(x)E(-x) = 1$ per concludere.

Quindi possiamo ricavarci anche la seguente formula

$$\log_b a^x = \log_b \left((b^{\log_b a})^x \right) = \log_b \left(b^{x \log_b a} \right) = x \log_b a$$

Infine si osservi che

$$\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \ln a$$

da cui segue che

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

ovvero il logaritmo in base a differisce da quello in base naturale solo per il fattore moltiplicativo $\ln a$.

Esercizi: Si dimostri che

1. $(\log_a b)(\log_b a) = 1 \qquad \forall a,\ b > 0$
2. $\log_a b = (\log_c b)(\log_a c)$
3. Le seguenti valutazioni del logaritmo sono numeri razionali; calcolarle senza l'ausilio della calcolatrice

$$\begin{array}{lll} \log_3 27 & \log_3(1/9) & \log_3(1/\sqrt{3}) \\ \log_8(\sqrt{2}/2) & \log_4 8 & \log_{\sqrt{2}} 64 \end{array}$$

4. Quante cifre sono necessarie per esprimere il numero 2^{64} nell'usuale base 10?
5. Si dimostri la seguente disuguaglianza (disuguaglianza di Young)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b, p, q > 0,\ : \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

[Suggerimento: si sfrutti la concavità del logaritmo.]