1 Le funzioni trigonometriche.

In seguito avremo modo di introdurre in maniera rigorosa le funzioni trigonometriche, per ora ci accontentiamo di darne una definizione “intuitiva”[1] che ci permetterà comunque di dedurne le proprietà fondamentali.
Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \\ & \alpha & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$$

che associa al numero reale α il punto $P(\alpha)$ della circonfernza unitaria che si raggiunge partendo dal punto $A=(0,1)$ e percorrendo sulla circonferenza unitaria un arco di lunghezza $|\alpha|$ in senso orario se $\alpha \geq 0$ ed in senso antiorario se $\alpha < 0$.

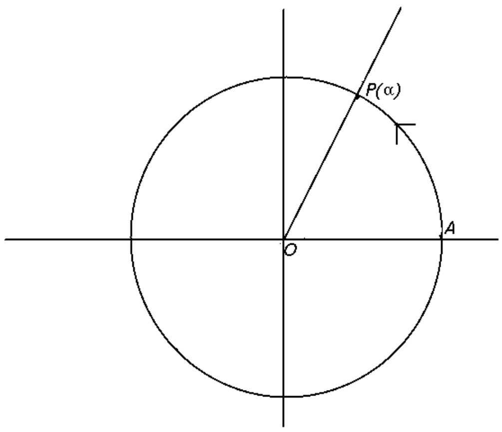


Figura 1: La definizione di $P(\alpha)$

Cosí facendo otteniamo una funzione periodica di periodo 2π visto che percorrendo un arco di lunghezza 2π si torna al punto di partenza.

Chiameremo $\cos\alpha$ la proiezione di $P(\alpha)$ sull'asse delle ascisse e $\sin\alpha$ quella sull'asse delle ordinate, quindi scriveremo $P(\alpha)=(\sin\alpha,\cos\alpha)$. Visto che, per definizione, $P(\alpha)$ sta sulla circonferenza unitaria si avrà che

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{1}$$

e quindi, di conseguenza

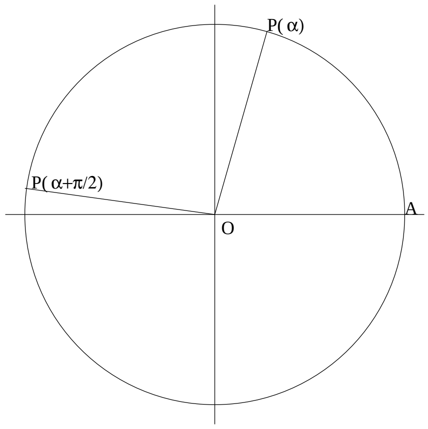
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Osserviamo che $P(\alpha)$ e $P(\alpha+\pi)$ sono simmetrici rispetto all'origine poiché $P(\alpha+\pi)$ si ottiene da $P(\alpha)$ percorrendo un semicerchio e quindi

$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha \quad \text{e} \quad \sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha.$$

Similmente dato che $P(\alpha+\pi/2)$ si ottiene ruotando $P(\alpha)$ di un quarto di giro in senso orario si ha che $\cos(\alpha+\pi/2)=-\sin\alpha$ e $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos\alpha$.

[1] Nel senso che questa definizione si appoggia sulla nostra concezione *intuitiva* di concetti come lunghezza di una curva o di area di una regione di piano che necessiterebbero di una definizione rigorosa.



Infine osserviamo che $P(\alpha)$ e $P(-\alpha)$ risultano sempre simmetrici rispetto all'asse delle ascisse e dunque $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Quindi recapitolando

$$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0 \qquad \cos(0) = \cos(2\pi) = 1 \tag{2}$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{3}$$
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \tag{4}$$
$$\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha \tag{5}$$

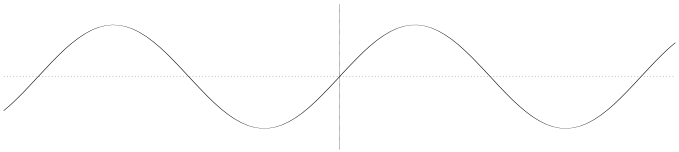
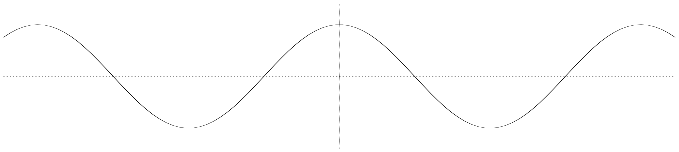


Figura 2: Il grafici delle funzioni seno (sopra) e coseno (sotto).



Esercizi:

1. Si individuino (geometricamente) sulla circonferenza unitaria i punti $P(\pi/3)$, $P(\pi/4)$ e $P(\pi/6)$. Calcolare i rispettivi valori delle funzioni seno e coseno.

2. Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:

$$\begin{array}{ll} \sin x = 1/2, & |\sin x| \leq \sqrt{2}/2, \\ 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0, & 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geq 0. \end{array}$$

3. Si determini estremo superiore ed inferiore dell'insieme

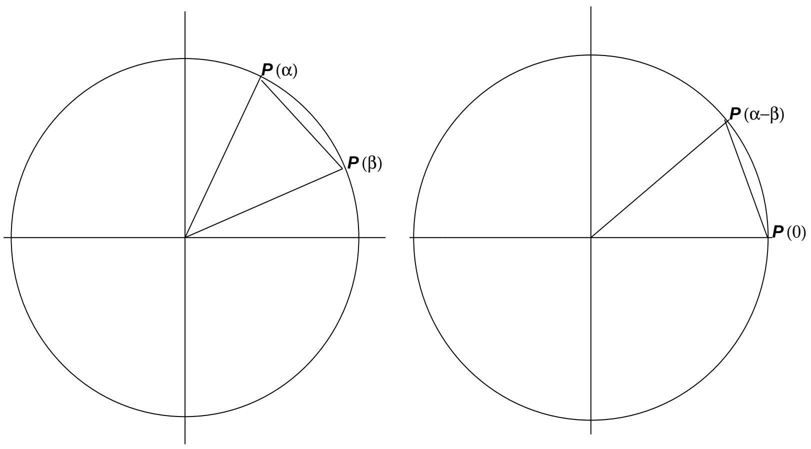
$$A = \{\cos^2 x + \sin x - 1 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$$

4. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$\cos(2\pi x) + \cos(2\pi x^2) = 2, \qquad \cos x + \cos(x^2) = 2.$$

1.1 Alcune utili formule trigonometriche.

Siano $\alpha,\ \beta\ \in\ \mathbb{R}$ e consideriamo i due punti della circonferenza unitaria $P(\alpha),\ P(\beta)$. La distanza tra $P(\alpha)$, e $P(\beta)$ è uguale alla distanza tra $P(\alpha-\beta)$ e $P(0)$ poichè queste coppie di punti individuano archi di circonferenza di ugual lunghezza.



Quindi

$$\mathrm{d}(P(\alpha), P(\beta))^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{d}(P(\alpha-\beta), P(0))^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

quindi

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

da questa ne possiamo ottenere delle altre, per esempio utilizzando la formula trovata unitamente alle equazioni (5) otteniamo

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha - (\beta+\pi/2) + \pi/2) = \cos(\alpha - (\beta+\pi/2)) \\ &= \cos\alpha\cos(\beta+\pi/2) + \sin\alpha\sin(\beta+\pi/2) \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{aligned}$$

similmente utilizzando le equazioni (4) otteniamo le formule per le somme di angoli. Riassumendo abbiamo dimostrato le seguenti *formule di addizione*:

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{array} \tag{6}$$

Un caso particolare ma degno di nota delle formule trovate sopra sono le *formule di duplicazione*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{7}$$

Ora, se poniamo

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{2} \\ \beta = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

utilizzando le formule (6) otteniamo

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}) \\ \cos x - \cos y &= 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}) \end{aligned} \tag{8}$$

Visto che, come dimostreremo nella sezione seguente, $|\sin\alpha| \leq |\alpha| \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$ la prima di queste due disuguaglianze implica che

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| &\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x-y|}{2} \\ & &\leq |x-y| \end{aligned}$$

quindi la funzione seno è lipschitziana con costante di lipschitzianità 1. Lo stesso discorso vale per la funzione coseno.

Esercizi:

1. Le formule (8) sono solo due delle *formule di Prostaferesi*:

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \ . \end{cases} \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

   . Si ricavino (con procedimento simile) le rimanenti due.

2. Utilizzando le *formule di addizione* (6) dedurre le *formule di Werner*:

$$\begin{cases} \sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \\ \sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]. \end{cases} \qquad \forall a,b,x \in \mathbb{R}.$$

3. Utilizzando le equazioni (7) e (1) dimostrare le formule di bisezione

$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \sin^2(x/2) = \frac{1-\cos x}{2} \tag{9}$$

4. Dimostrare che, posto $t = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$ si ha

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

5. Risolvere le disequazioni:

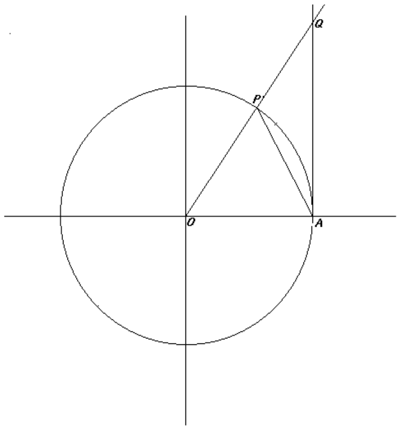
(i) $\sin x < \frac{1}{2}$, (ii) $4 \sin x \tan x - \frac{3}{\cos x} > 0$,

(iii) $\cos x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$, (iv) $\begin{cases} \tan x > \sqrt{3} \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases}$,

(v) $\dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\sin x + 1} > 0$, (vi) $\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x > \sqrt{2} - 1$.

1.2 Una disuguaglianza fondamentale.

Sia $0 \leq \alpha < \pi/2$, indichiamo con Q il punto di intersezione tra la retta passante per l'origine e per il punto $P(\alpha)$ e la retta $x = 1$. È facile constatare che $Q = (1, \tan\alpha)$, con $\tan\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$. Consideriamo le tre seguenti regioni piane:



- il triangolo AOP che indicheremo con T_1;
- il settore circolare AOP che indicheremo con S;
- il triangolo AOQ che indicheremo con T_2.

Le aree di queste regioni sono date rispettivamente da:

$$A(T_1) = \frac{\sin\alpha}{2} \qquad A(S) = \frac{\alpha}{2} \qquad A(T_2) = \frac{\tan\alpha}{2}.$$

Visto che $T_1 \subset S \subset T_2$ si avrà che $A(T_1) \leq A(S) \leq A(T_2)$ e quindi

$$\frac{\sin\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tan\alpha}{2}$$

Cioè $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$ per ogni $\alpha \in [0, \pi/2[$. Se invece $\alpha \in]-\pi/2, 0]$ si ha[2] $-\sin\alpha = \sin(-\alpha) \leq -\alpha \leq \tan(-\alpha) \leq -\tan\alpha \quad \forall\alpha \in]-\pi/2, 0]$ e dunque,

$$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \leq |\tan\alpha| \qquad \forall\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

[2]Si ricordi che seno e tangente sono funzioni dispari.

inoltre, visto che $|\sin\alpha| \leq 1 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che

$$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Esercizi:

1. Si utilizzi l'equazione (10) per dimostrare che, se $|\alpha| \in (0,\pi)$ valgono le seguenti stime:

$$\cos\alpha \leq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1, \quad 0 \leq 1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq \frac{\alpha^2}{2}.$$

   [Sugg: per la seconda si usino anche le formule di bisezione (9) e la disuguaglianza (10).]

2. Dimostrare le relazioni

$$\begin{array}{ll} \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\ , & \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ , \\ \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\ , & \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\ . \end{array}$$

   per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali le formule hanno senso.

1.3 Trigonometria e numeri complessi.

Le formule di addizione (6) hanno un significato piuttosto profondo ma tuttaltro che evidente. Tale significato può esser meglio compreso identificando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$ ovvero pensando alla coppia (x, y) come le coordinate del numero complsso $x + \mathbf{i}y$. Visto che su $\mathbb{C}$ sono definite le operazioni di somma e moltiplicazione

$$(x+\mathbf{i}y) + (x'+\mathbf{i}y') = (x+x') + \mathbf{i}(y+y') \qquad (x+\mathbf{i}y)\cdot(x'+\mathbf{i}y') = (xx'-yy') + \mathbf{i}(x'y+xy')$$

possiamo leggere tali operazioni in coordinate cartesiane:

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad (x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', x'y+xy') \tag{11}$$

Quindi visto che $P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ dalle formule di addizione utilizzando la notazione introdotta in (11) otteniamo

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) \\ &= (\cos\alpha, \sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta) \end{aligned}$$

ovvero in notazione più compatta

$$P(\alpha+\beta) = P(\alpha)\cdot P(\beta) \tag{12}$$

Questa formula tra l'altro costituisce un ottimo modo per ricavarsi velocemente le formule di addizione (6).