0.1 Divagazione: una formula di Vieta.

Consideriamo la seguente identità (il prodotto a destra è da intendersi infinito):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot ...$$

Questa formula, dovuta al matematico francese(?) François Viète (detto Vieta) ha, a prima vista, un aspetto misterioso ed esoterico. Il nostro scopo è ora demistificarla: vogliamo mostrare perchè è vera (dandone anche un'interpretazione geometrica) usando strumenti di trigonometria molto elementari.

Cominciamo dalla formula di bisezione

$$\sin x = 2\sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}),$$

e bisecando ulteriormente il seno che si trova al secondo membro otteniamo

$$\sin x = 4\sin(\frac{x}{4}) \cdot \cos(\frac{x}{4}) \cdot \cos(\frac{x}{2})$$

iterando questo procedimento, dopo n passi otteniamo la formula

$$\sin x = 2^n \sin(\frac{x}{2^n}) \cdot \cos(\frac{x}{2^n}) \cdot \cos(\frac{x}{2^{n-1}}) \cdot ... \cdot \cos(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}). \tag{1}$$

Per comodità scriviamo il prodotto dei coseni in forma più compatta usando la notazione della produttoria

$$\cos(\frac{x}{2^n}) \cdot \cos(\frac{x}{2^{n-1}}) \cdot ... \cdot \cos(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}) = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}). \tag{2}$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione 1 per x ($x \neq 0$) otteniamo

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}), \tag{3}$$

e riscriviamo quest'ultima equazione come

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}) - \omega_n(x) \quad \text{dove} \quad \omega_n(x) = \left(1 - \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}) \tag{4}$$

Osservando che il prodotto $\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}) \leq 1$ (in quanto $|\cos\alpha| \leq 1\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$) e ricordando che $0 \leq 1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq \frac{\alpha^2}{2}$ ($|\alpha| \in (0, \pi/2)$ otteniamo che, non appena $|x/2^n| < \pi/2$ vale la seguente stima per "l'errore" ω_n:

$$|\omega_n(x)| \leq \left|1 - \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4^n}. \tag{5}$$

Si osservi che $\forall x \neq 0$ fissato, la quantità $\omega_n(x)$ può essere resa piccola a piacere pur di prendere n sufficientemente grande. Se ora consieriamo il caso $x = \pi/2$ l'equazione 4 unitamente alla stima 5 provano che

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^{k+1}}) - \omega_n(\pi/2) \quad \text{con } 0 \leq \omega_n(\pi/2) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4^{n+1}}. \tag{6}$$

Questo termina la dimostrazione, infatti ponendo $a_n = \cos(\pi/2^{n+1})$ dalle formule di bisezione segue che

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2a_n} \end{cases} \qquad \text{cioé} \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ a_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\ a_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \\ \vdots \end{cases}$$

cioè gli a_k sono esattamente gli elementi della produttoria di Vieta.

Esercizio: Quanti termini deve contenere la produttoria per ottenere un valore di che aprossima $2/\pi$ con un errore più piccolo di 10^{-4}?

La dimostrazione presentata sopra, seppur elementare ed elegante, può sembrare un po' artificiosa. Vogliamo ora dare un'interpretazione geometrica che farà apparire la formula di Vieta sia tutto naturale.

Sia Q_n il poligono regolare con 2^{n+1} lati inscritto nella circonferenza unitaria, e sia $a_n = \cos(\pi/2^{n+1})$ il suo apotema.

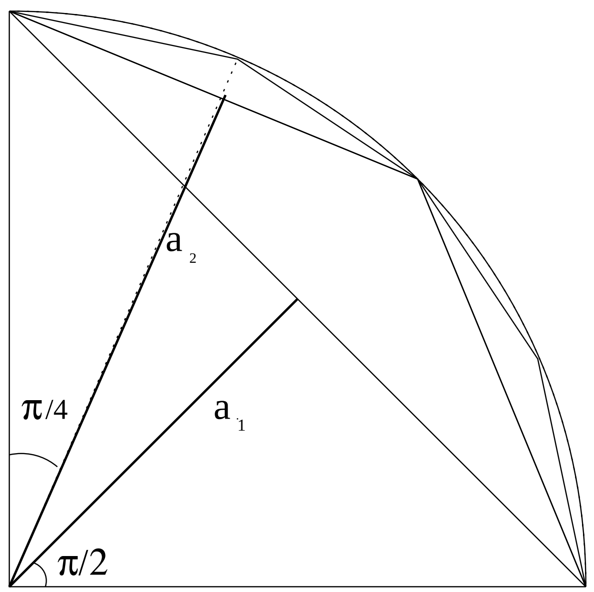

Figura 1: Poligoni ed apotemi

Detto I_n il perimetro di Q_n, dimostreremo tra breve che vale la seguente relazione ricorsiva:

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{1}{a_n}. \tag{7}$$

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} I_n &= \tfrac{I_n}{I_{n-1}} \cdot \tfrac{I_{n-1}}{I_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \tfrac{I_2}{I_1} \cdot I_1 \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n} \tfrac{1}{a_k}\right) \cdot I_1 \\ &= 4 \prod_{k=1}^{n} \tfrac{1}{a_k} \end{aligned} \qquad \left(\text{si ricordi che } \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ I_1 = 4\sqrt{2} \end{cases} \right)$$

Ma se n è molto grande è chiaro che I_n sarà vicino a 2π (il perimetro del cerchio unitario) cioé $I_n = 4\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \approx 2\pi$: dividendo per 4 entrambi i membri e passando ai reciproci ritroviamo l'equazione 6.

Dimostriamo ora, come promesso, la relazione ricorsiva 7: chiamando ℓ_n la lunghezza del lato di Q_n si avrà che $I_n = 2^{n+1}\ell_n$, pertanto $\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\ell_n}{\ell_{n-1}/2}$.

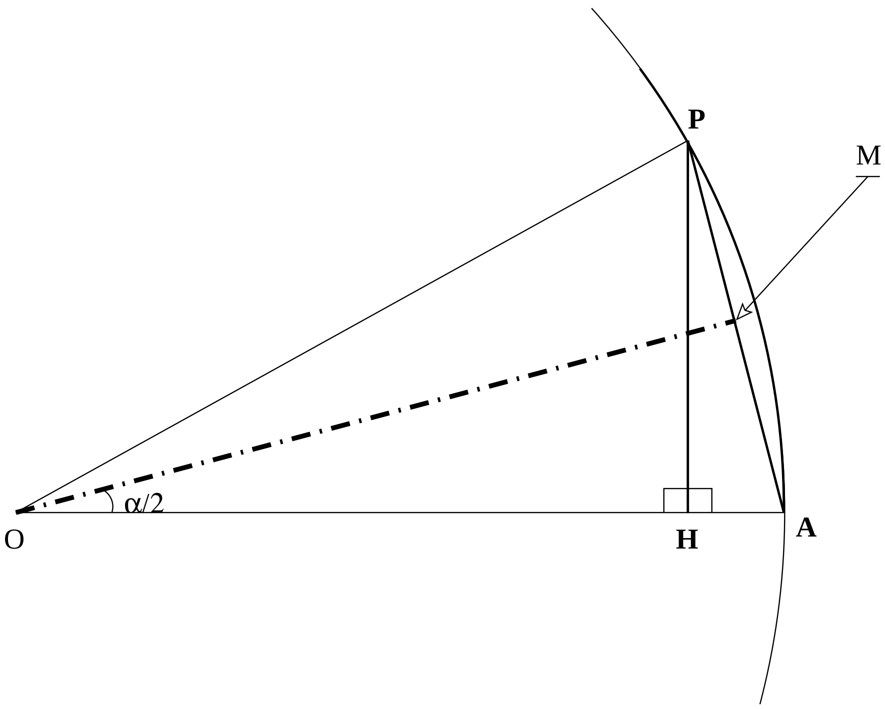

Figura 2: La relazione di ricorsione.

Nella figura PA rappresenta un lato di Q_n ed ha lunghezza ℓ_n mentre il segmento PH è un semilato di Q_{n-1} ed ha quindi lunghezza $\ell_{n-1}/2$. Se ora OM è un segmento della bisettrice dell'angolo AOP risulta chiaro che i triangoli APH e AOM sono simili e pertanto

$$\overline{AP} : \overline{PH} = \overline{AO} : \overline{OM} \quad \text{cioé} \quad \frac{\ell_n}{\ell_{n-1}/2} = \frac{1}{a_n}.$$