$$\rho = \sqrt{(e^2\cos 5)^2 + (e^2 \operatorname{sen} 5)^2} = \sqrt{e^4\cos^2 5 + e^4 \operatorname{sen}^2 5} = \sqrt{e^4(\cos^2 5 + \operatorname{sen}^2 5)} =$$

$$= e^2$$

$$\theta = 5$$

27/11/18

esercizio:

21/09/17

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = b_3 \end{cases}$$

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ f non e' iniettiva $(4>3)$ $\downarrow$ non può avere inv. sx

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & b_3 \end{array}\right)_{3\times4}$$

f iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

f non iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$

$\operatorname{Ker} f_A$ corrisponde all'insieme di tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato ("CONTIENE LE COSE CHE VANNO IN ZERO").

Il nucleo e' un sottospazio: $\operatorname{Ker} f_A \neq \{0\}$ ($\Rightarrow$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$)

$\operatorname{Im} f_A$ corrisponde all'insieme dei vettori dei termini noti $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ per i quali il sistema ha soluzione, in questo caso anche $\operatorname{Im} f$ e' un sottospazio [$\operatorname{Im} f_A \subseteq \mathbb{R}^3$ e' un sottospazio]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I;\ III-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 & b_2+b_1 \\ 0 & +4 & -4 & -4 & b_3-b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{III+\frac{4}{5}II} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{8}{5} & b_3-\frac{1}{5}b_1+\frac{4}{5}b_2 \end{array}\right) \end{array}$$

P = pivot (x_1, x_2, x_3)
L = libera (x_4)

Il $\underbrace{\text{n° delle colonne}}_{\#}$ pivot e' la dimensione dell'$\operatorname{Im} f_A$.

\# variabili libere = DIMENSIONE NUCLEO $\to$ 1 $\Rightarrow$
(OPPURE SPAZIO NULLO DELLA

$\Rightarrow$ un solo vettore sarà la $\mathcal{B}$ del nucleo.

DIMENSIONE 0 DEL NUCLEO significa che nel nucleo c'è solo lo 0 $\Rightarrow$ la f è iniettiva.

TEOREMA se $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è A.L.

allora $\boxed{\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = m}$

esempio $\longrightarrow$ $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$

$\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ è possibile? NO, altrimenti avrei

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{m} \neq \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\dim(\operatorname{Ker} f)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\dim(\operatorname{Im} f)}$$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f)$ dovrebbe essere 3.

continuo l'esercizio

RICORDA

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \dim(\operatorname{Im} f) = 3$, quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, cioè f è suriettiva, cioè il sistema ha sempre soluzione per ogni scelta dei termini noti.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_1 \\ -5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = b_2 + b_1 \\ -\frac{8}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4 = b_3 - \frac{1}{5}b_1 + \frac{4}{5}b_2 \end{cases}$$

con $b_1 = 11$, $b_2 = 1$, $b_3 = -5$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11 \Rightarrow x_1 = -x_4 + 3 \\ -5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -\frac{8}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4 = -\frac{32}{5} \Rightarrow x_3 = -x_4 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_4 + 4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \qquad S = \left\{ \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{SOL. SPECIALE}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{SOL. PARTICOLARE}} \middle| \lambda \in R \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA: Una base del nucleo è data dall'insieme delle "soluzioni speciali" che si ottengono ponendo $= 1$ a turno una variabile libera ed $= 0$ le altre, nel sistema omogeneo associato. Nel nostro caso:

$x_4 =$ variabile libera

$x_4 = 1$

risolvo il sist. omogeneo associato
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

La sol. di questo sist. è la sol speciale $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base di $\operatorname{Ker} f$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

TEOREMA: $\operatorname{Im} f$ ha come base le colonne pivot della matrice iniziale. Nel nostro caso: una base dell'$\operatorname{Im} f$ è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$

esercizio:

$T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dove
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & | & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 & | & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & b_3 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - II}$$

$$\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & | & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} \\ P \quad L \quad P \quad L \quad L \end{array}$$

$\Rightarrow$ la f non è suriettiva
$\Downarrow$
non sempre ci sono le soluzioni.

$\dim(\mathrm{Im}\, T) = 2$ (n° colonne pivot)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

RDA $\downarrow$

$\mathrm{Im}\, T =$ Span delle colonne della matrice associata.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ colonna inutile (multiplo della prima) $\Rightarrow$ VARIABILE LIBERA

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow$ " " $(2\,\underset{\text{colonna}}{I} + 4\,\underset{\text{colonna}}{II})$ $\Rightarrow$ VARIABILE LIBERA

> Ogni volta che si ottiene una variabile libera, quella colonna è combinazione lineare delle colonne precedenti.

Ker f ha dimensione uguale al numero di variabili libere.
Nel nostro esempio 3.

<u>CERCO LA BASE DEL Ker T</u> :

Le variabili libere sono x_2, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

sist. omogeneo associato (ridotto)

SOLUZIONI SPECIALI:

$\vec{S_1}$: $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3 \\ x_3 + 0 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{S_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{S_2}$: $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 2 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \\ x_3 + 4 = 0 \rightarrow x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\vec{S_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{S_3}$: $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ x_3 + 0 - 3 = 0 \rightarrow x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\vec{S_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- conclusione: una B del KerT è $B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• Il sistema è risolubile quando:

$$b_3 - b_1 - b_2 = 0$$

Questo significa precisamente che $\mathrm{Im}T = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, b_3 - b_1 - b_2 = 0 \right\}$

Abbiamo visto che una sua base è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Im}T$$

Soluzioni del sistema omogeneo associato = Ker f

quei vettori che "vanno a finire in 0"

Il KerT ha come base $B = \{ \vec{S_1}, \vec{S_2}, \vec{S_3} \}$

sol. del sist. o. associato $= \mathrm{Span}\{ \vec{S_1}, \vec{S_2}, \vec{S_3} \} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad + 2x_4 - x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = -3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ \quad x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \longrightarrow x_3 = -4x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 \\ -4x_4 + 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underline{x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -2 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{RID.}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

<u>TEOREMA</u> L'insieme delle sol. di un sistema lineare (risolubile) è

$$S = \{\vec{v}, \vec{x_p} \mid \vec{v} \in \ker f\}$$ dove $\vec{x_p}$ è una qualunque sol. partic.

Un modo semplice per trovare una sol. particolare è porre $=0$ tutte le variabili libere.

Nel nostro caso:

$$x_2 = x_4 = x_5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

quindi una sol. particolare è $\vec{x_p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

NON È UN SOTTOSPAZIO (a causa della presenza dei t.n.)

esercizio (6/06/2016)

$$e^{2z} - e^{\bar{z}+3} = 0$$

$$e^{2z} = e^{\bar{z}+3}$$

$$z = a + ib$$

> $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$
>
> è quel numero complesso che ha MODULO $= e^a$ e ARGOMENTO $= b$

$$e^{2a+2ib} = e^{(a+3)-ib}$$

$$\underset{\rho}{(e^{2a}}, \underset{\theta}{2b)} = \underset{\rho}{(e^{a+3}}, \underset{\theta}{-b)}$$

$$\begin{cases} e^{2a} = e^{a+3} \rightarrow 2a = a+3 \rightarrow a = 3 \rightarrow \text{NON È } \rho \\ 2b = -b + 2k\pi \rightarrow 3b = 2k\pi \rightarrow b = \frac{2}{3}\pi k \rightarrow \text{NON È } \theta \end{cases}$$

$$\boxed{z = 3 + i\left(k\frac{2\pi}{3}\right)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

INFINITE SOLUZIONI

$k=1$ $\quad z = 3 + \frac{2\pi}{3}i$

$k=2$ $\quad z = 3 + \frac{4\pi}{3}i$

..

$e^z = -1$ ha soluzione? Si, nei $\mathbb{C}$ $\quad e^{\pi i} = -1$

ESERCIZIO:

da fare!

$e^z = 0 \rightarrow$ IMPOSSIBILE ANCHE NEI $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ la funzione <u>non</u> può essere suriettiva.

però $e^z = w$ è risolubile $\forall$ numero $\mathbb{C}$ $w \neq 0$ ed ha infinite soluzioni.

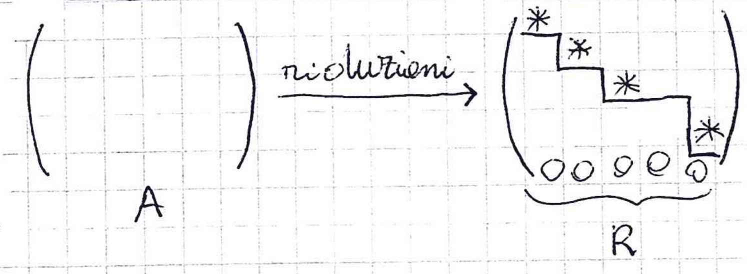
TEOREMA $\to$ NON È VERO : una matrice A è invertibile 29/11/18

$\Leftrightarrow$ A è quadrata $n \times n$ ed ha n pivot (non ci sono variabili libere).

"CONTROPOSITIVA", cioè assumiamo prima che $A_{n\times n}$ dove i pivot non sono n, cioè ci sono variabili libere.

DIM. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sia } A_{n\times n} \text{ con } n \text{ pivot}}$

INVERTIBILE = AVERE INV. DX E INV. SN UGUALI



Abbiamo visto che se $E_1, \dots, E_k$ sono le matrici corrispondenti alle mosse di Gauss, $R = E \cdot A$ dove $E = E_k \dots E_1$.

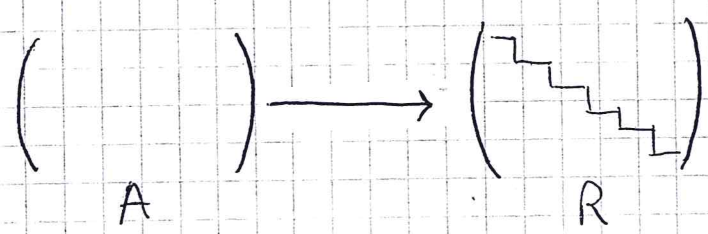
Abbiamo già visto che in questo caso A non ha inversa destra. Infatti se esistesse B t.c. $A \cdot B = I$, allora avrei $R = E \cdot A$ $\Rightarrow R \cdot B = E(A \cdot B) = E \cdot I = E$; poiché R ha una riga di zeri, anche RB ha una riga di zeri. Ma E è invertibile e non può avere una riga di zeri.

Inoltre A deve essere quadrata, altrimenti abbiamo già visto che A non è invertibile (se A è $n \times m$ e $n > m$ allora A non ha inversa dx, e se A è $n \times m$ e $n < m$ allora A non ha inversa sinistra).

RICORDARE: OGNI MOSSA DI GAUSS E_i È INVERTIBILE E QUINDI $E = E_k \dots E_1$ È INVERTIBILE

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DIM. $\Leftarrow$ Assumiamo $A_{n\times n}$ con n pivot. Devo dimostrare che esiste un'inversa di A:



Notiamo che in questa situazione, si trova una soluzione al sistema corrispondente <u>per ogni</u> scelta dei termini noti.
Quindi esiste $\vec{v_1}$ t.c. $A\underbrace{\vec{V_1}}_{\text{soluzione}} = \vec{e_1}$, ..., esiste $\vec{V_n}$ t.c. $A\vec{V_n} = \vec{e_n}$

Se prendo $B = \left(V_1 \middle| \cdots \middle| V_n\right)$ allora $A \cdot B = \left(A\vec{V_1} \middle| \cdots \middle| A\vec{V_n}\right) =$

$= \left(\vec{e_1} \middle| \cdots \middle| \vec{e_n}\right) = I$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ in questo caso

B è inversa destra

Nel nostro caso possiamo applicare il metodo di Gauss-Jordan alla matrice A.
Dunque esistono mosse di Gauss $E_1, \dots, E_k$ t.c. $EA = I$
dove $E = E_k \cdots E_1$
Quindi E è inversa sinistra.
Resta da vedere che l'inversa sx E e l'inversa dx B sono uguali.

$$E \cdot A = I \qquad A \cdot B = I$$

$$B = IB = (EA)B = E(AB) = EI = E$$

DETERMINANTI

Abbiamo già visto che $\begin{cases} aX + bY = \alpha \\ cX + dY = \beta \end{cases}$ <u>ha ed unica</u>

$\underbrace{\text{soluzione}}_{}$ $\forall$ scelta di α e β $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$

vettori non paralli

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è <u>invertibile</u> $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$, cioè $ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow f_A$ ha inv. dx inv. sn e coincidono $\Rightarrow f_A$ è BIUNIVOCA

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è biunivoca

= MODI EQUIVALENTI PER

- esercizio (invertire una matrice 2X2) ⟸ TROVA L'INVERSA DI A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 3(-4) - (2(-5)) = -12 + 10 = -2 \neq 0$$

$$\begin{cases} 3X - 5Y = \\ 2X - 4Y = \end{cases}$$

applico Gauss-Jordan

equivalentemente a Gauss-Jordan, risolviamo

$$\begin{cases} 3X - 5Y = 1 \\ 2X - 4Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3X - 5Y = 0 \\ 2X - 4Y = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow e_1 \qquad\qquad \downarrow e_2$$

SOLUZIONE $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \end{matrix}$ SOLUZIONE $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{1^a \text{ COLONNA}} + \underbrace{1\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}}_{2^a \text{ COLONNA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(-\frac{5}{2}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -2$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1$$

(Raddoppiando una riga, raddoppia il det)

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) =$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

↓ proprietà dei determinanti

$$\det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{pmatrix} = (a+a')d - (b+b')c = ad + a'd - bc - b'c =$$
$$= (ad - bc) + (a'd - b'c) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{II+\lambda I} \begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix}$$

QUESTO TIPO DI MOSSA DI GAUSS LASCIA INVARIATO IL det

MOSSE DI GAUSS

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix} = a(d+\lambda b) - b(c+\lambda a) =$$
$$= ad + \cancel{ab\lambda} - bc - \cancel{ab\lambda} = ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[a\neq 0]{II - \frac{c}{a} I} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} b \end{pmatrix}$$

N.B. Il determinante è uguale al prodotto dei pivot $a\left(d - \frac{c}{a} b\right) - b \cdot 0 =$
$= ad - bc$

DETERMINANTI DELLE MATRICI QUADRATE (in generale)

- Vogliamo associare ad ogni matrice $A_{n\times n}$ un numero, che chiamiamo DETERMINANTE di A e che denotiamo $\det(A)$, in modo che valgano le seguenti proprietà:

1) Se moltiplico una riga per λ, il determinante si moltiplica per λ.

2) Se una riga è la somma $\overbrace{R_1+R_2}^{\text{SOMMA DI 2 RIGHE}}$, allora il determinante è la somma del determinante dove considero R_1 e del determinante dove considero R_2

$$\det(R_1, \dots, R+R', \dots R_n) = \det(R_1, \dots, R, \dots R_n) + \det(R_1, \dots, R', \dots, R_n)$$

esempio: $(3,5) = (4,2) + (-1,3)$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

③ Se B si ottiene da A con una mossa di Gauss (non scambio di righe), allora $\det B = \det A$

④ $$\det(I) = 1$$

esempio:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

CONSEGUENZE

ⓐ Se A ha una riga di zeri, allora $\det A = 0$

↘ segue dalla proprietà ①. Infatti

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda 0 & \lambda 0 & \lambda 0 & \lambda 0 & \lambda 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A) = \lambda \det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$$

ⓑ Se A ha due righe uguali, allora $\det A = 0$.

↘ segue dalla proprietà ③.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & R & \cdots \\ \cdots & R & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{rid. di}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & R & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{B}$$

Ma $\det(A) = \det(B) = 0$

ⓒ Scambiando due righe, il determinante cambia segno.

esempio → segue dalla proprietà ②.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -8$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & R & \cdots \\ \cdots & R' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & R' & \cdots \\ \cdots & R & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$0 \underset{\text{per (b)}}{=} \det\begin{pmatrix} \vdots \\ R+R' \\ R+R' \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{\text{per (2)}}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R \\ R+R' \\ \vdots \end{pmatrix}} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R' \\ R+R' \\ \vdots \end{pmatrix}} \underset{\text{per (2)}}{=}$$

$$= \underbrace{\underset{0}{\underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R \\ R \\ \vdots \end{pmatrix}}} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ R \\ R' \\ \vdots \end{pmatrix}} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R' \\ R \\ \vdots \end{pmatrix} + \underset{0}{\underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R' \\ R' \\ \vdots \end{pmatrix}}}}$$

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ R \\ R' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ R' \\ R \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

■ Se $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale (cioè fuori dalla diagonale ho tutti zero).

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ è un esempio di matrice diagonale $\det A = -2 \cdot 0 = 0$

Allora $\det D = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$

Questo è conseguenza di (1) e (2)

esempio:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 2\cdot(-5)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= -10 \cdot 7 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -70 \cdot 1 = -70$$

Se qualche elemento sulla diagonale è zero, allora ho almeno una riga di zeri e il $\det = 0$ e la formula funziona anche in questo caso perché $d_1 \cdot d_2 \cdots d_n = 0$

TEOREMA: $\det(A) =$ prodotto dei pivot se ci sono n pivot, altrimenti, se ci sono variabili libere, $\det A = 0$.

DIM. Supponiamo di avere almeno una variabile libera.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{rid.}} \begin{pmatrix} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow R$

sempre così se ci sono v. l.

Ma allora $\det A = \det R = 0$

Supponiamo ora che A abbia n pivot:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{RID.}} \underset{R}{\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ & & & d_n \end{pmatrix}} \xrightarrow[\text{(prima del passo finale)}]{\text{Gauss-Jordan}} \underset{R'}{\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & d_3 & \\ 0 & & & \cdots d_n \end{pmatrix}}$$

R' significa che fuori dalla diagonale ci sono solo zeri.

$$\det(A) = \det(R) = \det(R') = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$$

<u>esercizio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}-4\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 22 & -27 \\ 0 & 15 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\frac{15}{22}\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 22 & -27 \\ 0 & 0 & \underbrace{-19-\frac{15}{22}\cdot 27}_{=-\frac{13}{22}} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \cancel{22} \cdot -\frac{13}{\cancel{22}} = \boxed{-13}$$

FORMULA DI SARRUS per i determinanti 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 4 - 15 + 0 - (-40 + 0 + 42) = \boxed{-13}$$

Sapere che $\det|A| \neq 0$ mi dice che A è invertibile.

In generale:

esempio

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si sceglie a piacimento una riga o una colonna, sviluppando "seguendo una riga o una colonna" (quella più conveniente è quella che ha più zeri).

SVILUPPO SECONDO LA 1ª RIGA

$$+ -5 \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

posto 1.1 (1+1) pari ⇒ +   posto 1.2 (1+2) dispari ⇒ −   posto 1.3

$$-1 \det\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

posto 1.4

sviluppando secondo II riga → più facile (verifica)

RICORDA

- esercizio:

Scrivere le coordinate di $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

VERIFICO SE $\mathcal{B}$ E' UNA BASE ↓

① $\mathcal{B}$ GENERA

② $\mathcal{B}$ LINEARMENTE INDIPENDENTE

① vuol dire che ogni $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei vettori della base, cioè $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.c.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Questo significa che l'A.L. associata alla matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ è suriettiva ($\Rightarrow$ ha inversa dx)

② vuol dire che vale l'implicazione $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Questo dice che l'A.L. associata a B è iniettiva perché $N(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ($\Rightarrow$ ha inversa sx).

CONSEGUENZA IMPORTANTE:

$\mathcal{B}$ è una base $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile

$\Updownarrow$

la matrice è quadrata

MODO PER VERIFICARE SE $\mathcal{B}$ E' UNA BASE → $\det B \neq 0 \Leftarrow$ $n \times n$ ed ha esattamente n pivot (no variabili libere)

$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \text{ perché } -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} \text{ dove } \lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

---

esempio: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ perché $0 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -\lambda_1 = -1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{II}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 = -1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 5\lambda_3 = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{5} \\ \lambda_3 = \frac{4}{5} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\-1/5\\4/5\end{pmatrix} \text{ perché } \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ =

coordinate del vettore $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$

Esercitazione 29/11/18

6)
$$e^{z-1} - e^{2\bar{z}} = 0$$

$$e^{z-1} = e^{2\bar{z}} \qquad z = a+ib \qquad \bar{z} = a - ib$$

$$e^{a-1+ib} = e^{2a-2ib}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\underset{\rho}{\underset{\parallel}{e^{a-1}}}, \underset{\theta}{\underset{\parallel}{b}}\right) = \left(\underset{\rho}{\underset{\parallel}{e^{2a}}}, \underset{\theta}{\underset{\parallel}{-2b}}\right)$$

$$\begin{cases} e^{a-1} = e^{2a} \longrightarrow a-1 = 2a \qquad a = -1 \\ b = -2b + 2k\pi \longrightarrow 3b = 2k\pi \qquad b = \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

$$z = -1 + \left(\frac{2}{3}\pi k\right) i \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{INFINITE SOLUZIONI}$$

$$\left.\begin{array}{ll} k=1 & z = -1 + \frac{2\pi}{3} i \\ k=2 & z = -1 + \frac{4}{3}\pi i \\ k=3 & z = -1 + 2\pi i \end{array}\right\} \text{non serve}$$

7)
$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{A.L.} \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \\ 8x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 9x_4 \\ 4x_1 - 3x_2 \; 0x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di Imf

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 8 & -5 & -2 & -9 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} - 4\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}}$$

$$\begin{array}{cccc} p & p & l & l \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
$x_3, x_4 = $ v.l.

$\vec{S_1}$

$x_3 = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 & x_1 = -\frac{1}{3} \\ -x_2 + 2 = 0 & x_2 = -2 \end{cases}$ $\vec{S_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = 0$

$\vec{S_2}$

$x_3 = 0$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4 = 0 & x_1 = \frac{11}{2} \\ -x_2 + 7 = 0 & x_2 = 7 \end{cases}$ $\vec{S_2} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_4 = 1$

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 8 & -5 & -2 & -9 & 18 \\ 4 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-4\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{array}{c} \begin{matrix} p & p & l & l & & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ -x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -18 \rightarrow x_2 = 2x_3 + 7x_4 + 18 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$2x_1 - 2x_3 - 7x_4 - 18 - x_3 - 4x_4 = 9$

$2x_1 - 3x_3 - 11x_4 - 18 = 9$ $\quad x_1 = 3x_3 + 11x_4 + 27$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 11x_4 + 27 \\ x_2 = 2x_3 + 7x_4 + 18 \\ x_3 = x_3 = s \\ x_4 = x_4 = t \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. speciali del sist. o.a.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} +27 \\ +18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol. particolare del s. completo}} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

8)
$$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
sviluppando secondo la II colonna

$$-3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + -2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

posto $1.2 \Rightarrow 1+2=3$ DISPARI posto $2.2 = 4$ PARI posto $3.2 = 5$ DISPARI

$$-3 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (-4-3) - 2(1-0) - (-1-0) = 21 - 2 + 1 = 20$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 20$$

9) Trovare la matrice B associata all'A.L. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + y + 3z \\ x - 3y + 5z \end{pmatrix} \qquad B = \left\{ (Tv_1)_{\mathcal{B}}, (Tv_2)_{\mathcal{B}}, (Tv_3)_{\mathcal{B}} \right\}$$

- scrivo le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 & \rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 & \rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_3 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrice B associata all'A.L. → es. 9. esercitazione

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + y + 3z \\ x - 3y + 5z \end{pmatrix}$

rispetto alla base $B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

Matrice A associata a T (rispetto alla base canonica)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \left(Te_1 \middle| Te_2 \middle| Te_3 \right)$$

le colonne sono le immagini $\underbrace{\text{della base}}_{\text{dei vettori}}$ canonica $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = $ (combinazione lineare delle colonne) $= x \cdot Te_1 + yTe_2 + zTe_3 =$

vettore che ha queste coordinate rispetto alla base canonica

$= Txe_1 + Tye_2 + Tze_3 =$

$= T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$B = \left((Tv_1)_B \middle| (Tv_2)_B \middle| (Tv_3)_B \right)$ Prendo un vettore di coordinate $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B

$$B\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 (Tv_1)_B + \alpha_2 (Tv_2)_B + \alpha_3 (Tv_3)_B$$

Come è fatta B?

$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (Tv_1)_B$ (→ come accade per tutte le matrici)

$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (Tv_2)_B$

$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (Tv_3)_B$

$Tv_1 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad Tv_3 = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Tv_2 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Che coordinate hanno rispetto alla base $\mathcal{B}$?

Cerco μ_1, μ_2, μ_3 t.c. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \mu_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2 = 1 \rightarrow \mu_1 = 0 \\ \mu_3 = 2 \longrightarrow \mu_3 = 2 \\ -\mu_2+\mu_3 = 1 \rightarrow \mu_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ coordinate del vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2 = -1 \longrightarrow \mu_1 = -4 \\ \mu_3 = -1 \longrightarrow \mu_3 = -1 \\ -\mu_2+\mu_3 = -4 \longrightarrow \mu_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2 = 2 \longrightarrow \mu_1 = 0 \\ \mu_3 = 4 \longrightarrow \mu_3 = 4 \\ -\mu_2+\mu_3 = 2 \longrightarrow \mu_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

Conclusione:

$$\boxed{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A.L. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

se A e' la matrice associata a T rispetto alla base canonica e se B e' la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, allora $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ dove $S = (v_1 | \dots | v_n)$ e' la matrice "cambio di base".

Nel nostro esempio:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det S = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} = 0+0+0-(0-1+0) = 1$$

$\det S \neq 0 \Rightarrow S$ e' invertibile

RICORDARE CHE $\{v_1, \dots, v_n\}$ FORMANO UNA BASE di $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(v_1 | \dots | v_n) \neq 0$

la matrice e' invertibile.

$S^{-1} = ?$

$\left(S \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{vettori della}\\ \text{base canonica}\end{array}\right) \rightarrow$ GAUSS - JORDAN

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}}^{S} \;\vdots\; \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{I}\right) \xrightarrow[\text{II e III}]{\text{scambio}} \left(\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} \;\vdots\; \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \left(\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} \;\vdots\; \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix} \;\vdots\; \begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right) \xrightarrow{-1\cdot\text{II}} \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}}_{S^{-1}}\right)$$

$S^{-1} \cdot S = I \quad S \cdot S^{-1} = I$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} = \boxed{B}$$

S è la matrice "cambio di base": infatti

$$\underset{S}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}\underset{\vec{V}_*}{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}} = \underbrace{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{VETTORE } \vec{V} \text{ CHE HA COORDINATE } \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \text{ RISPETTO ALLA BASE } B.}$$

$$AS\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = A\vec{V} = T\vec{V} = \vec{W}$$

$$S^{-1} \cdot A \cdot S\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \vec{W}$$

Se scrivo un vettore con coordinate $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ rispetto alla base B

$$S\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \text{vettore scritto rispetto alla base canonica.}$$

Se scrivo un vettore con coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto alla
[ba]se canonica $S^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ = vettore scritto rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S \text{ da base } \mathcal{B} \text{ a base } \mathcal{E} \\ S^{-1} \text{ da base } \mathcal{E} \text{ a base } \mathcal{B} \end{array}}$$

$S^{-1} A S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$

$\underbrace{S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vettore $\vec{v}$ " " " $\mathcal{E}$

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad T\cdot\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{E}$

$S^{-1} A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad T\cdot\vec{v}$ " " " $\mathcal{B}$

Conclusione: $B = S^{-1} A S$ è la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare
che proprietà deve avere una base
$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ in modo che la matrice B associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia DIAGONALE?

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

1) prendo un vettore $\vec{v}$
2) scrivo le sue coordinate $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ rispetto alla base B.
3) $B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ sono le coordinate di $T\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$,
cioè $T\vec{v} = \beta_1\vec{v_1} + \beta_2\vec{v_2} + \beta_3\vec{v_3}$

esempio: Come si calcola $T\vec{v_1}$ usando la matrice B?

a) Le coordinate di $\vec{v_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

ESEMPIO CON NUMERI
$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ Infatti $1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ = "prima colonna", cioè $\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{pmatrix}$, queste sono le coordinate di $T\vec{v_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

c) Quindi $T\vec{v_1} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda_1\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + 0\cdot\vec{v_3} = \lambda_1\vec{v_1}$

$T\vec{v_2}$? $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ = "seconda colonna di B", cioè $\begin{pmatrix}0\\ \lambda_2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{Tv_2} = \begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 0\vec{v_1} + \lambda\vec{v_2} + 0\vec{v_3} = \lambda_2\vec{v_2}$

Analogamente $T\vec{v_3} = \lambda_3\vec{v_3}$

Conclusione: se B è diagonale $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$, i vettori della base hanno la proprietà: $T\vec{v_1} = \lambda_1\vec{v_1}$

$T\vec{v_2} = \lambda_2\vec{v_2}$

$T\vec{v_3} = \lambda_3\vec{v_3}$

DEFINIZIONE:

Un vettore $\vec{v} \neq 0$ si dice AUTOVETTORE dell'A.L. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se esiste un certo λ, che si dice autovalore, tale che

$$T\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

N.B. Se B è una base, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, fatta di autovettori, cioè $T\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}, \dots, T\vec{v_n} = \lambda_n \vec{v_n}$ allora la matrice B associata a T rispetto alla base B è DIAGONALE:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La prima colonna di B è $(Tv_1)_B$ ma $T\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ e quindi $(Tv_1)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analogamente, la seconda colonna è $(Tv_2)_B$ ma $T\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2}$ e quindi $(Tv_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...

La matrice associata a T rispetto alla base B è DIAGONALE se e solo se i vettori di B sono autovettori.

esercizio

$$9e^{z} - e^{3\bar{z}} = 0$$

$$9e^{z} = e^{3\bar{z}} \qquad z = a + ib$$

Ricordare che $e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$ è quel n.c. che ha modulo $= e^{a}$ e argomento $= b$.

$\Rightarrow 9e^{z} = 9e^{a+ib}$

MODULO $\rho = 9e^{a}$

ARGOMENTO $= b$ (l'angolo rimane invariato)

$$e^{3\bar{z}} = e^{3(a-ib)} = e^{3a-3ib}$$

$\downarrow$

MODULO $\rho = e^{3a}$

ARGOMENTO $\theta = -3b$

$$(9e^a, b) = (e^{3a}, -3b)$$
$$\rho, \theta \qquad \rho, \theta$$

$$\begin{cases} 9e^a = e^{3a} \\ b = -3b + 2k\pi \end{cases}$$

$\downarrow$

$$4b = 2k\pi$$
$$b = \frac{k\pi}{2}$$

$$9e^a = e^{3a}$$
$$\ln 9e^a = \ln e^{3a}$$
$$\ln 9 + \ln e^a = \ln e^{3a}$$
$$\ln 3^2 + a = 3a$$
$$2\ln 3 = 2a \qquad \boxed{a = \ln 3}$$

$b = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi, 2\pi, \dots$

SOLUZIONI:

$$z = \ln 3 + ik\frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{e^{4\pi^2+z^2}}{\overline{w}}$$

$z = 1 - 2\pi i$

$w = 1 + i$

$$z^2 = (1-2\pi i)^2 = 1 + 4\pi i^2 - 4\pi i = 1 - 4\pi^2 - 4\pi i$$

$$4\pi^2 + z^2 = \cancel{4\pi^2} + 1 - \cancel{4\pi^2} - 4\pi i = 1 - 4\pi i$$

$$e^{1-4\pi i} = e^1(\overbrace{\cos(-4\pi)}^{=1} + i\,\overbrace{\text{sen}(-4\pi)}^{=0}) = e$$

$$-4\pi = 0$$

$\overline{w} = 1 - i$

$$\frac{e}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{e+ie}{1-i^2} = \frac{e}{2} + i\frac{e}{2}$$

$$z \cdot z' \longrightarrow (\rho\rho', \theta + \theta')$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad V_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ è una base?

$\Updownarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile $\Leftrightarrow$ la matrice è quadrata

ODI PER VERIFICARE L'INVERTIBILITÀ: ① Gauss-Jordan $\rightarrow$ solo se tutte le colonne sono pivot.

) $\det A \neq 0$

Sviluppo secondo la 2ª riga:

$$(-5)\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \cancel{0 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}} - \cancel{0 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}} + \cancel{0 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}} =$$

$\downarrow$

ª riga Iª colonna

$2+1=3 \Rightarrow -$

$$= 5 \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & -4 \end{matrix} = 0 + 0 - 24 - (0 - 8 + 0) = -16$$

$$= 5 \cdot (-16) = -80$$

$$5(+4)\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot (-4) = -80$$

ase di $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}$

$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ A.L.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

$\operatorname{Ker} f = W$ (tutti quei vettori che vanno a finire in 0)

$$\dim(\mathrm{Ker} f) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im} f)}_{1} = 4$$

$$\dim(\mathrm{Ker} f) = 3$$

$$\dim W = 3$$

MODO 1

matrice $\begin{array}{cccc} (3 & 4 & -3 & -4) \\ P & L & L & L \end{array}$
1x4

$x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ $\downarrow$ $x_1 = -\frac{4}{3}$

$x_2 = 0$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$ $\downarrow$ $x_1 = 1$

$x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_4 = 1$ $\downarrow$ $x_1 = \frac{4}{3}$

$$\underbrace{S_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. speciali}}$$

$\downarrow$
=
vettori della Base di W

MODO 2

prova con vettori

AUTOVETTORI

6/12/18

Def. Un vettore $\vec{v} \neq 0$ si dice <u>autovettore</u> di un' A.L. di una matrice A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, detto autovalore, tale che $A \cdot \vec{v} = \underbrace{\lambda \vec{v}}_{\text{multiplo di } \vec{v}}$

le matrice A_{B} rispetto alla base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e' diagonale $\Leftrightarrow$ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sono autovettori.

RIPASSO: supponiamo che la matrice A_{B} rispetto alla base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sia diagonale $\Rightarrow$

$$A_{B} = \left[(Tv_1)_{B} \,\middle|\, (Tv_2)_{B} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, (Tv_m)_{B} \right] = \qquad T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ A.L.}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (Tv_1)_{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{B} \dots (Tv_n)_{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B}$$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \lambda_1 v_1$$

e' autovettore di autovalore $\lambda_1 \Leftarrow$ $Tv_1 = \lambda_1 v_1$

' autovettore di autovalore $\lambda_n \Leftarrow$ $Tv_n = \lambda_n v_n$

me faccio a trovare (eventuali) autovettori?

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

sempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{autovettore}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{v} = \lambda I \cdot \vec{v}$$

$$A \cdot \vec{v} - \lambda I \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{v} \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

per essere iniettiva il Ker deve contenere solo 0

$\vec{v} \neq 0$, quindi

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

$\Leftrightarrow f_{A-\lambda I}$ NON iniettiva

$\Leftrightarrow A - \lambda I$ NON ha inversa sinistra

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda I} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ per la proprietà: $A \cdot \vec{x} \pm B \cdot \vec{x} = (A \pm B) \cdot \vec{x}$

RICORDARE: B matrice $n \times n$. Allora sono proprietà equivalenti:
1) f_B biunivoca
2) B ha inversa
3) $\det B \neq 0$

Conclusione

$$\boxed{\lambda \text{ è un autovalore} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.}$$

In questo caso ogni vettore $\vec{v} \neq 0$ che appartiene al $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ è un autovettore.

N.B. $\vec{v} \neq 0$, $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \Leftrightarrow \vec{v}$ è autovettore di autovalore λ.

$$\vec{v} \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda I \vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Se $\vec{v}$ è autovettore di autovalore $5 = \lambda \Rightarrow$

$$A \cdot \vec{v} = 5\vec{v} \qquad \vec{w} = 3\vec{v} \qquad A \cdot \vec{w} = 3 \cdot 5\vec{v} = 15\vec{v} = 5\vec{w}$$

Per ogni autovettore c'è un solo autovalore.

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \text{AUTOSPAZIO DELL'AUTOVALORE } \lambda$$

$\vec{v}$ = autovettore di $\lambda=5$ allora $3\vec{v}$ = autovettore di autovalore $\lambda=5$ (DOMANDA DA TEST (V))

Prima si trovano gli (eventuali) autovalori

λ è un autovalore $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I)=0$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda) - 2\cdot 1 = -\lambda+\lambda^2-2=0$$

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \qquad \lambda_{1/2} = \frac{+1\pm\sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \lambda=2 \\ \lambda=-1 \end{matrix}\right\} \text{AUTOVALORI}$$

$\vec{v}$ è autovettore di autovalore $\lambda=2$ se e solo se $\vec{v}\in \operatorname{Ker}(A-2I)$, cioè $\vec{v}\in\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+\frac{1}{2}I} \begin{array}{cc} P & L \\ \left(\begin{matrix} -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -2x_1+2x_2=0 \rightarrow x_1 = 1 \end{cases} \qquad \vec{s}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{sol. speciale}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{OK}$$

quindi $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda=2$

- $\vec{v}$ è autovettore di autovalore $\lambda = -1$ se e solo se $\vec{v} \in \ker(A+I)$

$$A+I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ P & L \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = -1$

$B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori.

La matrice A scritta rispetto alla base B è

$$A_B = B = \left((Av_1)_B \middle| (Av_2)_B \right) = \left((2v_1)_B \middle| (-1v_2)_B \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RICORDARE IL CAMBIO DI BASE: $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ nel nostro caso questa è la matrice cambio di base.

Gauss-Jordan
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+\frac{2}{3}II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

autovalori

È DIAGONALIZZABILE

la matrice A è diventata diago

– esercizio esame settembre 2018

DIAGONALIZZA A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \cancel{3-\lambda} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -6-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 9-\lambda & -3 \\ 0 & 18 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 9-\lambda & -3 \\ 18 & -6-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)\left((9-\lambda)(-6-\lambda) - (-3)(18)\right) =$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)(-\cancel{54} - 9\lambda + 6\lambda + \lambda^2 + \cancel{54}) = (3-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda)\cdot\lambda(\lambda-3) = \lambda(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-3)^2 = 0$$

le sol. sono gli autovalori

$\lambda = 0 \quad \lambda = -1 \quad \lambda = 3$

molteplicità algebrica $1 \longrightarrow 1$ autovettore

" " $1 \longrightarrow 1$ autovettore

" " $2 \Rightarrow (\lambda-3)^2$ ha la stessa radice 2 volte

$\downarrow$

≤ 2 autovettori

se $\lambda = 0$ <u>AUTOVALORE</u> Cosa significa?
Vuol dire che esiste almeno un vettore $\vec{v} \neq 0$ (autovettore) tale che $A\cdot\vec{v} = 0\cdot\vec{v} = 0 \iff \operatorname{Ker} A \neq \{0\}$
$\iff A$ non invertibile. λ AUTOVALORE $\iff A$ <u>non</u> è INVERTIBILE.

continuo l'es.

lo tolgo solo dalla diagonale

$\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I E II}]{\text{SCAMBIO}} \begin{array}{c} \begin{matrix} L & P & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{CON IV}]{\text{SCAMBIO II}}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} L & P & P & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{III - \frac{1}{3} II} \begin{array}{c} \begin{matrix} L & P & P & L \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} -4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 18x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ $\quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{V_1}$

$x_1 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$ $\quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{V_2}$

$\lambda = -1$

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \end{pmatrix} \to$$

TEOREMA (anticipo): se λ è un autovalore di molteplicità algebrica K, allora $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)) \leq K$

$$\xrightarrow[IV - \frac{9}{2} II]{III - \frac{5}{2} II} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - 2III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x_1 = 0 & \to x_1 = 0 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 & x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 & \to x_4 = 0 \end{cases} \qquad \vec{V_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$A - 0I = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - 2III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 9x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 1$, $x_3 = 1/3$, $x_2 = -2/3$, $x_1 = 0$ $\qquad \vec{V_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A scritta nella base $\mathcal{B}$ è $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B=S^{-1}AS$

STESSA COSA

DOMANDA DA COMPITO: Calcolare $A^4 = A\cdot A\cdot A\cdot A$

$SBS^{-1}=A$

$$A\cdot A\cdot A\cdot A = SB\underbrace{S^{-1}\cdot S}_{=I}B\underbrace{S^{-1}S}_{=I}B\underbrace{S^{-1}S}_{=I}BS^{-1} =$$

$$= SB^4S^{-1}$$

$B^4=\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ se $D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix}$ è diagonale

$D^k=\begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m^k \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE 10/12/18

...no $v_1, \dots, v_m$ sono autovettori di autovalore rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

...e gli autovalori sono a due a due distinti, allora $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme linearmente indipendente.

...M: Cominciamo vedendo il caso più semplice $m=2$

...utov. $v_1 \rightsquigarrow$ autovalore λ_1

" $\quad v_2 \rightsquigarrow$ " $\quad \lambda_2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ indipendenti

...cioè non sono uno multiplo dell'altro

...nfatti, se per assurdo fosse $v_1=\mu v_2$

$A\cdot v_1$, visto che v_1 è autov. di autovalore λ_1 $\quad A\cdot v_1=\lambda_1 v_1$

...ice $\quad Av_2=\lambda_2 v_2$

$$Av_1 = A\mu v_2 = \mu A v_2$$

$$\boxed{AV_1} = \mu(AV_2) = \mu\lambda_2 V_2 = \lambda_2 \mu V_2 = \boxed{\lambda_2 V_1}$$

$AV_1 = \lambda_1 V_1$ quindi $\lambda_1 V_1 = \lambda_2 V_1$, cioè $(\lambda_2 - \lambda_1) V_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$

N.B.

Se v è autovettore di autovalore λ, allora μv è anch'esso autovettore di autovalore λ.

esempio:

$$A\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix}$$ quindi $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ è autov. di autovalore 2.

Se prendo $7\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix}$ ho che $A\begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix} = 7\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix}$

Il caso generale $n > 2$ è analogo

FORMULA DI BINET

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Ripasso sui determinanti:

- Il det NON cambia per mosse di Gauss del tipo $R \to R + \lambda R'$ = ALTRA RIGA
- Il det cambia segno quando scambio 2 righe
- det = associare ad una matrice, un numero
- $\det\begin{pmatrix} \text{---} \\ R+R' \\ \text{---} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \text{---} \\ R \\ \text{---} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \text{---} \\ R' \\ \text{---} \end{pmatrix}$ ← RICORDA

esempio

$$\det\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 7 & -5\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 10 & -7\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$\quad = R \qquad\qquad = R'$

$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ ← ATTENZIONE !!!

$\det(A) = \pm$ prodotto dei pivot (se ho n pivot)
$\det(A) = 0$ (se ci sono variabili libere)

se A ha due righe uguali, $\det A = 0$
se A ha una riga di zeri, $\det A = 0$

→ $\pm$ dipende da quanti scambi di righe abbiamo fatto nella risoluzione di Gauss-Jordan.

$\boxed{A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0}$

sempi:

$\det(A) = 3 \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$

$A \cdot A^{-1} = I \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(I) = 1$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \underline{\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{3}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ allora $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$

$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\det A^{-1}} = -4 \cdot 5 \cdot 2 = -40$

utte le matrici che hanno questo "triangolo" di zeri hanno come det il prodotto dei numeri sulla diagonale.

↓

l det di matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

ef.: due matrici A e B si dicono SIMILI se una si ottiene dall'altra cambiando base, cioè se corrispondono alle stesse A.L. ($\underbrace{\text{rispetto a basi diverse}}_{\text{ma sono scritte}}$).

IMPORTANTE: A e B sono simili $\Leftrightarrow$ esiste una matrice S "cambio di base" t.c. $B = S^{-1}AS$

Def $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e' un polinomio di grado n detto "polinomio caratteristico di A".

PROPOSIZIONE: se A e B sono simili allora

$P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ e quindi A e B hanno gli stessi autovalori.

ESERCIZI:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

- Autovalori? $\rightarrow$ sono le radici del polinomio caratteristico.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$ non ha radici reali.

Usiamo i numeri complessi: $\lambda^2 + 4 = 0$ $\quad \lambda^2 = -4$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$

$\lambda_1 = 2i$

$\lambda_2 = -2i$

Aut.$(A, 2i) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) =$ = AUTOSPAZIO dell'autovalore $2i$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2iI} \begin{array}{cc} P & L \\ \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

deve essere zero, senno' non ci sarebbero variabili libere e quindi nel nucleo non ci sarebbe

[illegible]

soluzioni:

$$\begin{cases} -2i x_1 - x_2 = 0 \\ -2i x_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = 1$

$$x_1 = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i}{-2} = \frac{1}{2}i \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2i$

"DEVO CALCOLARE IL NUCLEO"

$$\mathrm{Aut}(A, -2i) = \mathrm{Ker}(A + 2iI) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} + 2i\,\mathrm{I}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

soluzioni:

$$\begin{cases} 2i x_1 - x_2 = 0 \\ 2i x_1 - 1 = 0 \end{cases} \qquad x_2 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$\boxed{\text{L'inverso di } 2i\text{, cioè } \frac{1}{2i}\text{, è } -\frac{1}{2}i \text{ controlla!}}$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ base di AUTOVETTORI

Verifica:

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2i$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Matrice "cambio di base" S

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3-\lambda & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)-18\right] =$$

$$= (3-\lambda)^2(\lambda^2-\lambda-20) = (3-\lambda)^2(\lambda-5)(\lambda+4)$$

$\lambda = 3$ autovalore di molteplicità algebrica 2

$\lambda = 5$ " " " " 1

$\lambda = -4$ " " " " 1

$\boxed{\lambda = 3}$

$$\mathrm{Ker}(A-3I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III+I \\ IV+6I}]{II+4I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}-2\mathrm{II}]{\mathrm{I}-\frac{3}{7}\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & P \end{array} \end{array}$$

Troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_4 = 0 \\ 7x_4 = 0 \end{cases}$$

variabili libere $= x_2$ e x_3

$x_2 = 1$ $\quad x_1 = 0$

$x_3 = 0$ $\quad x_4 = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$ $\quad x_1 = 0$

$x_3 = 1$ $\quad x_4 = 0$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 5}$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{III}+3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-6\mathrm{I}}]{\mathrm{II}-4\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$\overline{IV} + 2\overline{III} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ -6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

variabili libere : x_4

$x_4 = 1$

$$\begin{cases} -6x_3 + 3 \cdot 1 = 0 \to x_3 = \frac{1}{2} \\ -2x_2 + 8 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 1 = 0 \to 2x_2 = -1 \to x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \to x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trovare $\vec{v}_4$, autovettore di autovalore $\lambda = -4$

$S = (v_1 | v_2 | v_3 | v_4)$ ed ha :

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$