Programma del corso “Spazî di curvatura negativa”
Docente: dott. Roberto Frigerio
Anno Accademico 2007-2008
Laurea Specialistica in Matematica (30 ore, 7 crediti)

Negli ultimi due decenni molti matematici, primo fra tutti M. Gromov, hanno lavorato all'estensione del concetto di curvatura dall'ambito delle varietà Riemanniane al più generale contesto degli spazî metrici. La teoria che è scaturita da tale impostazione, oltre che rivelarsi assai utile nello studio di proprietà topologiche e geometriche di varietà e di complessi simpliciali di dimensione bassa, ha permesso di dare nuove dimostrazioni di teoremi classici su varietà di curvatura negativa, e di estendere molti risultati validi per tali varietà a spazî singolari con proprietà opportune.

Scopo del corso è fornire un'introduzione alla teoria degli spazî di curvatura negativa e di descrivere le direzioni di ricerca attualmente attive nell'area.

Prerequisiti

- Spazi metrici e topologici.
- Gruppo fondamentale e teoria dei rivestimenti.
- Per quanto lo sviluppo della teoria degli spazi metrici a curvatura negativa non si serva della teoria delle varietà, la conoscenza della nozione di curvatura di Gauss per superficî può agevolare l'intuizione del contenuto geometrico di molti risultati che saranno dimostrati nel corso.

Contenuti del corso

- Richiami su spazî metrici. Geodetiche, spazî metrici interni, spazî geodetici. La nozione di angolo in uno spazio metrico generico.
- Le geometrie a curvatura costante: spazio Euclideo, sfera, spazio iperbolico.
- Il Teorema di Hopf-Rinow (nel contesto generale di spazî metrici interni).
- Spazi metrici di curvatura minore o uguale a k: la nozione di spazio CAT(k).
- Il Teorema di Cartan-Hadamard per spazî CAT(0).

- Il “bordo all'infinito” di uno spazio CAT(0).
- Proprietà topologiche di spazî metrici CAT(0).
- Un altro approccio alla curvatura negativa: gli spazî Gromov-iperbolici.
- Azioni isometriche di gruppi su spazî metrici.
- I gruppi Gromov-iperbolici: definizioni, esempi, proprietà.
- Applicazioni: gruppo fondamentale e rivestimenti di spazî di curvatura non positiva.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*

[2] W. Ballmann, *On the geometry of metric spaces*, disponibile sulla web-page di Werner Ballmann

[3] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'apres Mikhael Gromov*

[4] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Geometrie et theorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov*

[5] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*

[6] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*

I primi quattro testi qui riportati propongono un approccio alla materia molto simile a quello che verrà descritto nel corso, gli ultimi due sono di lettura meno agevole.