Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Primo Compitino di Analisi Matematica I. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{31} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{1}{\pi}\sin(\pi a_k)\,. \end{cases}$$

i. Si provi che la successione (a_k) è convergente e se ne calcoli il limite.

ii. Si provi che la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\sin(\pi a_k)$ è convergente e se ne calcoli la somma.

Soluzione.

(i) La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$ è crescente, perché per ogni $x \le y$ si ha $|\sin(y) - \sin(x)| \le y - x$ e quindi

$$f(y) - f(x) = (y - x) + \sin(y) - \sin(x) \ge 0.$$

Inoltre, poiché $25 < 31 < 36$ si ha $5 < \sqrt{31} < 6$ e quindi $a_1 - a_0 = \frac{1}{\pi}\sin(\pi\sqrt{31}) \le 0$. Come è noto dalla teoria, ciò implica che la successione a_k è decrescente e converge alla più grande soluzione x dell'equazione $f(x) = x$ che sia minore di a_0. In questo caso l'equazione si scrive $\sin(\pi x) = 0$, le cui soluzioni sono esattamente gli interi. Concludiamo che nel nostro caso $\lim_{k\to\infty} a_k = 5$.

(ii) Dalla definizione di a_k si ha

$$\sin(\pi a_k) = \pi(a_{k+1} - a_k)$$

e sommando per k fra 0 e n si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\pi a_k) = \pi\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \pi(a_{n+1} - a_0).$$

Segue quindi che la serie è convergente e

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sin(\pi a_k) = \pi(5 - \sqrt{31}).$$

Analogamente per altri valori di a_0, e per la funzione $f(x) = x - \sin(x)$.

Esercizio 2. Siano b_k numeri reali non negativi, per $k \in \mathbb{N}$.

i. Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \le \prod_{k=1}^{n}(1 + b_k) \le \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big).$$

ii. Si provi che $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$ se e solo se $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + b_k) < +\infty$.

iii. Si provi la disuguaglianza $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \log(n + 1)$.

Soluzione.

(i) La prima disuguaglianza si prova per induzione su n: infatti essa è una uguaglianza se $n = 1$ *(base dell'induzione)* ; inoltre se vale per il numero n, moltiplicando per $1 + b_{n+1}$ si trova *(passo induttivo)*

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + b_k) = \prod_{k=1}^{n}(1 + b_k)(1 + b_{n+1}) \ge \big(1 + \sum_{k=1}^{n} b_k\big)(1 + b_{n+1}) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n+1} b_k.$$

La seconda disuguaglianza è equivalente, prendendo il logaritmo, a:

$$\log \prod_{k=1}^{n}(1 + b_k) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + b_k) \le \sum_{k=1}^{n+1} b_k$$

che segue immediatamente dalla nota disuguaglianza $\log(1+x) \le x$. *Oppure* si può anche usare la disuguaglianza delle medie:

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(1 + b_k)\right]^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + b_k) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

da cui, ricordando che vale $(1 + x/n)^n \le \exp(x)$ per ogni $x \ge 0$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + b_k) \le \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n}\right)^n \le \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big).$$

(ii) È conseguenza immediata di (i).

(iii) Prendendo $b_k = 1/k$, e osservando che

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k + 1}{k} = n + 1,$$

da (i) segue subito $\log(n + 1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 18-01-2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ di coefficiente

$$a_n := n^a \int_0^{+\infty} t^b \, e^{-n^c t} dt.$$

Trovare un numero positivo C tale che $C \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 2C$. *(NB: nelle diverse versioni dell'esercizio nel testo d'esame,* $0 \leq b \leq 1$ *e* $a - (b+1)c = -3$ *).*

Soluzione. Rendiamo più esplicita la dipendenza da n nell'integrale con la sostituzione $n^c t = x$, $t^b = n^{-bc} x^b$ e $dt = n^{-c} dx$:

$$a_n := n^a \int_0^{+\infty} t^b \, e^{-n^c t} dt = n^{a-(b+1)c} \int_0^{+\infty} x^b \, e^{-x} dx = n^{-3} \int_0^{+\infty} x^b \, e^{-x} dx.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{+\infty} x^b \, e^{-x} dx \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3},$$

e si può stimare separatamente l'integrale euleriano e la serie armonica generalizzata. Per stimare l'integrale osserviamo che, per ogni esponente $0 \leq b \leq 1$ la funzione x^b è concava sull'intervallo $[0, +\infty)$. Quindi, per ogni $x > 0$ vale $\min(x, 1) \leq x^b \leq 1 + b(x-1)$. Integrando

$$\int_0^{+\infty} \min(x,1) e^{-x} dx \leq \int_0^{+\infty} x^b \, e^{-x} dx \leq \int_0^{+\infty} (1 + bx - b) e^{-x} dx.$$

Gli integrali ai lati della disuguaglianza si calcolano facilmente, e si trova per il primo

$$\int_0^{+\infty} \min(x,1) e^{-x} dx = \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \big[-(x+1) e^{-x} \big]_0^1 + \big[-e^{-x} \big]_1^{+\infty} = 1 - \frac{1}{e}$$

e per l'altro

$$\int_0^{+\infty} (bx + 1 - b) \, e^{-x} dx = b \int_0^{+\infty} x \, e^{-x} dx + (1-b) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \; .$$

In conclusione $1 - 1/e \leq \int_0^{+\infty} x^b \, e^{-x} dx \leq 1$, da cui, ritornando ad a_n e sommando

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \; .$$

Dalle stime col test integrale, $0 \leq \sum_{n=3}^{\infty} n^{-3} \leq \int_2^{\infty} x^{-3} dx = 1/8$, da cui $1 + 1/8 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \leq 1 + 1/8 + 1/8$ e in conclusione

$$\frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{5}{4} \; ,$$

corrispondente per esempio a $\mathbf{C = 7/10}$. *(NB: La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *con* $b = 1/2$ *e* $b = 1/3$ *valeva* $1,06529519351...$*, rispettivamente* $1,07341218626...$*).*

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) := \int_0^x (1+u^2)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2-u}{2+u}\right) du$$

Calcolare la derivata sesta di $f(x)$ nel punto $x = 0$.

Soluzione. Poiché la derivata prima di f è

$$f'(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

si tratta di calcolare la derivata quinta di $f'(x)$ nel punto $x = 0$. Per la formula di Taylor, essa è $5! = 120$ volte il coefficiente di x^5 nello sviluppo polinomiale di $f'(x)$ in $x = 0$ all'ordine 5. Si ha da noti sviluppi in $x = 0$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)$$

e

$$\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \log\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) = -x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{80}x^5 + o(x^5)$$

Da qui si trova

$$f'(x) = -x + \frac{7}{12}x^3 - \frac{17}{240}x^5 + o(x^5)$$

e il valore della derivata sesta di f in 0, $f^{(6)}(0) = (f')^{(5)}(0) = \mathbf{17/2}$.

Varie espressioni per di $f'(x)$ e di $f^{(6)}(0)$ nelle diverse versioni del tema d'esame:

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}} \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x + \frac{5}{12}x^3 - \frac{17}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{149}{6}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -x + \frac{1}{4}x^3 + \frac{91}{6}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{3}} \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x + \frac{5}{12}x^3 + \frac{63}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x + \frac{7}{12}x^3 - \frac{17}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -x + \frac{5}{12}x^3 - \frac{83}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -x + \frac{5}{12}x^3 + \frac{37}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = x + \frac{7}{12}x^3 + \frac{103}{2}\frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 5-02-2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^7)^{1/3}}\, e^{\sin x} \cos x \; dx$$

Converge questo semplicemente? Converge assolutamente?

Soluzione. Sia f la funzione di variabile $x \geq 0$

$$f(x) := \frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^7)^{1/3}}.$$

Poiché $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x^{7/3}(1+o(1))} = x^{-1/3}(1 + o(1))$ questa funzione è infinitesima ed è positiva in un intorno $+\infty$ (si noti che ciò non garantisce ancora che $f(x)$ sia decrescente in un intorno $+\infty$). La derivata di f è continua, e si annulla esattamente negli zeri di un polinomio, dunque al più in un insieme finito di punti (precisamente: se P e Q sono rispettivamente i polinomi che appaiono a numeratore e denominatore in $f := PQ^{-1/3}$, sia ha $f' = (PQ^{-1/3})' = \big(P'Q - P/3\big)Q^{-4/3}$ e dunque f' si annulla esattamente dove si annulla il polinomio $P'Q - P/3$). Siccome f' si annulla in un insieme finito di punti, per il teorema degli zeri ha segno costante per ogni x abbastanza grande. Quindi la f è monotona in un intorno di $+\infty$; precisamente, decrescente (infatti si è già stabilito che f è infinitesima e positiva all'infinito).

La funzione $e^{\sin x} \cos x$ è la derivata della funzione periodica $g(x) := e^{\sin x}$. In particolare, $e^{\sin x} \cos x$ ha integrale nullo sul periodo. Si può applicare il noto principio di convergenza per integrali oscillanti e si conclude che l'integrale proposto è convergente.

Oppure: Integrando per parti:

$$\int_0^T \frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^7)^{1/3}}\, e^{\sin x} \cos x \, dx = \int_0^T f(x)g(x)' \, dx = -\int_0^T f(x)'g(x) \, dx + f(T)g(T) - f(0)g(0) \, .$$

Si ha $f(T)g(T) = o(1)$ per $T \to +\infty$ perchè f è infinitesima e g è periodica, quindi limitata da una qualche costante M. Inoltre l'integrale $\int_0^T f(x)g'(x) \; dx = -\int_0^T f'(x)g(x) \; dx$ è assolutamente convergente, in quanto, essendo $f' \leq 0$ per x grandi, vale

$$\big|f'(x)g(x)\big| = -f'(x)\big|g(x)\big| \leq -Mf'(x),$$

e quindi

$$\int_0 \big|f'(x)g(x)\big| \; dx \leq -M \int_0^T f'(x)dx = M\Big((0) - f(T)\Big).$$

Ciò prova la convergenza semplice dell'integrale.

Infine, l'integrale proposto non è assolutamente convergente. Infatti dalle stime per f segue che per un $x_0 > 0$ vale per esempio

$$\left|\frac{x^2 - x + 1}{(1 + x^7)^{1/3}} e^{\sin x} \cos x\right| \geq \frac{|\cos x|}{x},$$

per ogni $x > x_0$, pertanto la non assoluta convergenza segue per confronto dalla non assoluta convergenza di $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$, la quale a sua volta segue dal fatto che ogni intervallo $[(n-1)\pi, n\pi]$ dà un contributo all'integrale

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \frac{1}{n} \int_0^{\pi} |\cos x| x dx = \frac{2}{n}$$

per cui $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ diverge per confronto con la serie armonica.

Esercizio 2. Calcolare l'integrale improprio (nella variante della versione del testo)

$$\int_0^1 \frac{dt}{t - 2t^{1/3} + 4}.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + t^{1/3} - 10}.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + 3t^{2/3} + 3t^{1/3} + 2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + 3t^{2/3} + t^{1/3} + 3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + 2t^{2/3} + t^{1/3} + 2}.$$

Soluzione. Si tratta di eseguire le operazioni richieste dalla procedura di integrazione.

Cambio di variabile per integrale definito: $t := x^3$, $dt = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t - 2t^{1/3} + 4} = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4} dx$$

Fattorizzazione del polinomio a denominatore: Il polinomio $x^3 - 2x + 4$ ha la radice $x = -2$ e quindi è divisibile per $(x+2)$. Si ottiene infatti $x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$ medskip *Decomposizione in frazioni reali semplici*: Si determinano le costanti a, b, c tali che

$$\frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx + c}{x^2 - 2x + 2}$$

identificando i coefficienti dei polinomi

$$3x^2 = a(x^2 - 2x + 2) + (bx + c)(x + 2).$$

Il sistema lineare corrispondente è $a+b=3$, $-2a+2b+c=0$, $2a+2c=0$, da cui $a=6/5$, $b=9/5$, $c=-6/5$. Il valore di a si può anche trovare subito ponendo $x=-2$, da cui $12=10a$.

Preparazione per l'integrazione con funzioni elementari: La seconda frazione si decompone ulteriormente in forma di derivata logaritmica P'/P:

$$\frac{3x^2}{x^3-2x+4} = \frac{6}{5}\,\frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}\,\frac{3x-2}{x^2-2x+2} = \frac{6}{5}\,\frac{1}{x+2} + \frac{9}{10}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{x^2-2x+2} =$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{1}{x+2} + \frac{9}{10}\,\frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2} + \frac{3}{5}\,\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

Si ha perciò

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3-2x+4}dx = \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+2}dx + \frac{9}{10}\int_0^1 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}dx + \frac{3}{5}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{6}{5}\Big[\log(x+2)\Big]_0^1 + \frac{9}{10}\Big[\log(x^2-2x+2)\Big]_0^1 dx + \frac{3}{5}\Big[\arctan(x-1)\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{5}(\log 3 - \log 2) + \frac{9}{10}(-\log 2) + \frac{3}{5}(-\arctan(-1)).$$

$$= \frac{6}{5}\log 3 - \frac{21}{10}\log 2 + \frac{3\pi}{20} = 0,3339...$$

Per le altre varianti, analogamente:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+t^{1/3}-10} = \int_0^1 \frac{3x^2}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx =$$

$$= \frac{57}{26}\log 2 - \frac{27}{26}\log 5 + \frac{3\pi}{104} - \frac{3}{26}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = -0,1146...$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+3t^{2/3}+3t^{1/3}+2} = \int_0^1 \frac{3x^2}{(x+2)(x^2+x+1)}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\log 3 - 4\log 2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,1656...$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+3t^{2/3}+t^{1/3}+3} = \int_0^1 \frac{3x^2}{(x+3)(x^2+1)}dx =$$

$$= -\frac{27}{10}\log 3 + \frac{111}{20}\log 2 - \frac{9\pi}{40} = 0,1738...$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+2t^{2/3}+t^{1/3}+2} = \int_0^1 \frac{3x^2}{(x+2)(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{12}{5}\log 3 - \frac{21}{10}\log 2 - \frac{3\pi}{10} = 0,2385...$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 25-02-2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Si studi la funzione $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) := \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t\log t},$$

calcolando:
i) i limiti di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to \infty$,
ii) gli eventuali punti di massimo e minimo,
iii) gli intervalli di monotonia.

Soluzione. Dal calcolo delle derivate $(t\log t)' = 1 + \log t$ e $(t\log t)'' = 1/t$ si ha subito che la quantità $t\log t$ al variare di $t > 0$ è infinitesima per $t \to 0$, è convessa, raggiunge il valore minimo $-1/e$ nel punto $t = e^{-1}$. Perciò l'integrando $1/(1+t\log t)$ si estende a una funzione continua su tutto l'intervallo $[0, +\infty[$, con valori compresi fra 0 e $1/(1-e^{-1})$. Si ha quindi subito $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$. Inoltre per $e^{-1} \le x \le t$ si ha $1/(1+t\log t) \le 1/(1+x\log x)$ e quindi $f(x) \le x/(1+x\log x) \le 1/\log x$, così $f(x) = o(1)$ anche per $x \to +\infty$. Essendo $f(x) > 0$ su tutto il dominio e $\inf_{x>0} f(x) = 0$, f non ha minimo nel dominio.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, scrivendo $f(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{1+t\log t} - \int_0^{x} \frac{dt}{1+t\log t}$ segue che la f è derivabile e

$$f'(x) := \frac{2}{1+2x\log 2x} - \frac{1}{1+x\log x} = \frac{1-(\log 4)x}{(1+2x\log 2x)(1+x\log x)} .$$

Questo permette di dire subito che la f è crescente nell'intervallo $]0, 1/\log 4]$, ha un massimo assoluto per $x = 1/\log 4$, è decrescente nell'intervallo $[1/\log 4, +\infty[$.

Esercizio 2. Si determini il minimo $k \in \mathbb{Z}$ per cui esista e sia finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{\tan(x\cos x) - (\tan x)\cos(\tan x)},$$

e si calcoli questo limite.

Soluzione. L'espressione a denominatore ammette uno sviluppo della forma $px^k + o(x^k)$ per qualche intero positivo k e qualche reale non nullo p. La domanda si può riformulare equivalentemente chiedendo il valore di questi k e p (il limite corrispondente valendo quindi $1/p$). Per semplificare i calcoli conviene svolgere le operazioni su espressioni letterali. L'espressione a denominatore è: $f(F(x)) - F(f(x))$, ottenuta componendo le due funzioni: $f(x) := \tan x$ e $F(x) := x\cos x$. Esse sono entrambe dispari, con $f'(0) = F'(0) = 1$ e ammettono perciò sviluppi in $x = 0$ della forma:

$$f(x) := x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7)$$
$$F(x) := x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + o(x^7)\,.$$

Lo sviluppo corrispondente per $f(F(x)) - F(f(x))$, tenendo conto delle semplificazioni dovute alle simmetrie, è

$$\begin{gathered}(x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7) + ax^3(1 + Ax^2 + Bx^4)^3 + bx^5(1 + Ax^2)^5 + cx^7 - \\ -(x + ax^3 + bx^5 + cx^7) - Ax^3(1 + ax^2 + bx^4)^3 - Bx^5(1 + ax^2)^5 - Cx^7 + o(x^7) \\ = (3A^2a - 3Aa^2 + 2Ab - 2Ba)x^7 + o(x^7).\end{gathered}$$

Dai noti sviluppi di $\tan x$ e $\cos x$ si ha:

$$a = \frac{1}{3}\ b = \frac{2}{15}\ A = -\frac{1}{2} B = \frac{1}{24}$$

da cui

$$\tan(x\cos x) - (\tan x)\cos(\tan x) = \frac{23}{90}x^7 + o(x^7)$$

e il limite richiesto **90**/23. Si noti che lo sviluppo della tangente richiesto si può ottenere

subito identificando i coefficienti a, b negli sviluppi a destra e sinistra a nella identità $f' = 1 + f^2$ verifica dalla funzione tangente:

$$1 + 3ax^2 + 5bx^4 = 1 + (x + ax^3)^2 + o(x^4);$$

similmente per altri coefficienti (per esempio, risulta $C = 17/315$).

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 14-06-2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Dire se è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt[7]{n}},$$

e, in caso affermativo, calcolare la parte intera del suo valore.

Soluzione. La funzione $x \mapsto e^{-x^{1/7}}$ è positiva, continua e decrescente sull'intervallo $[0,+\infty[$. Perciò valgono le disuguaglianze di confronto con l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{1/7}} dx < \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^{1/7}} < 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x^{1/7}} dx.$$

L'integrale si calcola con il cambio di variabile $x = t^7$, $dx = 7t^6 dt$, che lo riconduce al noto integrale euleriano:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{1/7}} dx = 7 \int_0^{+\infty} e^{-t} t^6 dt = 7! = 5040.$$

Si conclude che la somma della serie è compresa strettamente fra 5040 e 5041 ed ha quindi parte intera 5040.

Osservazione. Si noti che né criterio del rapporto né il criterio della radice risolvono il problema della convergenza per la serie di termine $a_n := e^{-\sqrt[7]{n}}$, in quanto sia il rapporto $a_{n+1}/a_n = e^{-(n+1)^{1/7}+n^{1/7}}$, sia la radice n-sima, $\sqrt[n]{a_n} = e^{n^{-6/7}}$, convergono a 1. Funziona il confronto asintotico con la serie di termine generale $1/n^2$, osservando che $e^{-\sqrt[7]{n}} = o(1/n^2)$; ciò tuttavia non risponde al problema della stima della somma.

Esercizio 2. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}\,. \end{cases}$$

(i) Si provi che la successione (x_n) è convergente e se ne calcoli il limite.
(ii) Si provi che la successione

$$y_n := \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$$

è convergente e se ne calcoli il limite.

Soluzione. (i) La funzione $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ è continua e crescente dall'intervallo $[0, +\infty[$ in sé, e ha come unico punto fisso $\xi = 3/2 + \sqrt{5}/2$. Per quanto è noto dalla teoria, la successione x_n è crescente e converge a ξ.
(ii). Per il teorema del valor medio

$$y_n = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(\xi_n)$$

per qualche ξ_n tale che $x_n < \xi_n < x_{n+1}$. Per il teorema dei due carabinieri anche ξ_n converge a ξ ed essendo $f'(x) = x^{-1/2}/2$ continua in ξ, la successione $y_n = f'(\xi_n)$ converge a $f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Variante. Dall'identità algebrica

$$y_n := \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}}$$

si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{5}+1}.$$

Esercizio 3. Si determini il massimo $a \in \mathbb{N}$ per cui si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^5 e^{-x^2} - bx^5}{x^a} < +\infty$$

per almeno un $b \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Poiché $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, vale lo sviluppo

$$(\sin x)^5 e^{-x^2} = x^5 + o(x^5),$$

e la domanda equivale a chiedere quale sia il grado del successivo termine non nullo nello sviluppo. Dagli sviluppi della funzione seno ed esponenziale si trova in effetti

$$(\sin x)^5 e^{-x^2} - bx^5 = (1-b)x^5 - \frac{11}{7}x^7 + o(x^7),$$

così la risposta alla domanda iniziale è $a = 7$, corrispondente al valore $b = 1$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 05-07-2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un parametro reale e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \lambda \arctan(x_n)\,. \end{cases}$$

(i) Per quali λ la successione (x_n) è decrescente?
(ii) Per quali λ la successione (x_n) è convergente?
(iii) Per quali λ la successione (x_n) è infinitesima?
(iv) Per quali λ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge semplicemente?
(v) Per quali λ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge assolutamente?

Soluzione. Osserviamo prima di tutto che, essendo la funzione arcotangente una funzione dispari, la successione $y_n := (-1)^n x_n$ verifica le relazioni $y_0 = 1$ e $y_{n+1} = (-1)^{n+1}x_{n+1} = -\lambda \arctan((-1)^n x_n) = -\lambda \arctan(y_n)$. In altre parole, la successione generata dalla ricorrenza con il parametro $-\lambda$ è la successione relativa al parametro λ moltiplicata per $(-1)^n$. È perciò sufficiente studiare la ricorrenza nel caso $\lambda \geq 0$.

Nel caso $\lambda \geq 0$ la funzione $f(x) := \lambda \arctan x$ è crescente e continua dall'intervallo $[0, +\infty[$ in sé. In questa situazione, come è noto dalla teoria, la successione (x_n) generata è monotona crescente (rispett. decrescente) e converge al primo punto fisso di f a destra (rispett. a sinistra di x_0) a seconda che $x_0 \leq f(x_0)$, rispett. $x_0 \geq f(x_0)$; oppure diverge se non esiste tale punto fisso (caso che qui non si verificherà mai).

Se $0 \leq \lambda \leq 1$ si ha $f(x) \leq \arctan x < x$ per ogni $x > 0$ e $x = 0$ è l'unico punto fisso di f. Se $\lambda > 1$ invece l'equazione di punto fisso $f(x) = x$ deve avere un'altra soluzione $x = p = p(\lambda) > 0$ per il teorema degli zeri (infatti si ha, dallo sviluppo al primo ordine, $f(x) - x = (\lambda - 1)x + o(x) > 0$ per $x > 0$ in un intorno di zero, mentre $f(x) - x < 0$ per x sufficientemente grande). Poiché la funzione f è concava su $[0, +\infty[$ non può avere altri punti fissi e si ha $f(x) > x$ in $]0, p[$ e $f(x) < x$ in $]p, +\infty[$.

(i). Per quanto detto, se $\lambda \geq 0$, la successione (x_n) è decrescente se e solo se $f(1) < 1$, mentre se $\lambda < 0$ la successione certamente non può essere decrescente (si ha $x_1 < 0 < x_2$). Essendo $f(1) = \lambda \arctan(1) = \lambda\pi/4$ si ha a conti fatti: (x_n) è decrescente se e solo se

$$\boxed{0 \leq \lambda \leq \frac{4}{\pi}.}$$

(ii) e **(iii)**. Se $0 \leq \lambda \leq 1$ la successione (x_n) converge a zero, perché in tal caso è decrescente e 0 è l'unico punto fisso di f a sinistra di $x_0 = 1$. Se $1 < \lambda \leq 4/\pi$, (x_n) è decrescente, ma converge al punto fisso positivo $p > 0$ di f. Se $\lambda \geq 4/\pi$, (x_n) è crescente e converge al punto fisso positivo, ora $p \geq 1$. Se $\lambda < 0$, come visto, la successione è della forma $x_n = (-1)^n y_n$, con y_n convergente a zero se $0 \leq -\lambda \leq 1$, oppure a un limite non nullo se $-\lambda > 1$. In conclusione: la successione (x_n) è convergente se e solo se

$$\boxed{-1 \leq \lambda}$$

ed è infinitesima se e solo se

$$\boxed{-1 \leq \lambda \leq 1}$$

(iv) e **(v)**. Se $-1 \leq \lambda \leq 0$ per i precedenti punti (i) e (iii) e per l'osservazione iniziale, sono soddisfatte le condizioni del criterio di Leibnitz, e la serie $\sum_n x_n$ converge. Qualunque sia λ, poiché $|\arctan x| \leq |x|$ si ha subito per induzione $|x_n| \leq |\lambda|^n$, cosicché per $|\lambda| < 1$ la serie converge anche assolutamente. D'altra parte se $|\lambda| > 1$ la serie non può convergere perché non è soddisfatta la condizione necessaria $x_n = o(1)$. Rimane il caso $\lambda = 1$. Per induzione proviamo che

$$x_n \geq \frac{1}{n+1}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Infatti $x_0 = 1$, e se per un $n \geq 0$ vale $x_n \geq 1/(n+1)$, allora, dalla disuguaglianza $\arctan x \geq x - x^3/3$ valida per ogni $x \geq 0$ si ha

$$x_{n+1} = \arctan x_n \geq \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3(n+1)^3}$$

e il passaggio induttivo segue dalla elementare disuguaglianza

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3(n+1)^3} \geq \frac{1}{n+2}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Per confronto con la serie armonica si ha che la serie diverge per $\lambda = 1$, e quindi anche che non converge assolutamente per $\lambda = \pm 1$. In conclusione: $\sum_n x_n$ converge semplicemente se e solo se

$$\boxed{-1 \leq \lambda < 1}$$

e converge assolutamente se e solo se

$$\boxed{-1 < \lambda < 1}$$

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan^2 x \, dx$$

Soluzione. Integrando due volte per parti si trova per l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned}\int x \arctan^2 x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan^2 x - \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan^2 x - \int \arctan x dx + \int \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan^2 x - x \arctan x + \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx.\end{aligned}$$

Riconoscendo le primitive $\log(1+x^2)/2$ rispettivamente $(\arctan^2 x)/2$ per gli ultimi due integrali si trova infine

$$\int x \arctan^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \arctan^2 x + \frac{1}{2} \log(1+x^2),$$

da cui, ricordando che $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan^2 x \, dx = \frac{2}{9}\pi^2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2.$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 26/07/2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la funzione f sull'intervallo aperto $I := -]\pi/2, \pi/2[$ definita da:

$$f(x) = \int_0^x \Big(\frac{1}{\cos t} - 1\Big)\frac{1}{t}dt\ .$$

i) Provare che f è una funzione pari;

ii) Calcolare $\lim_{x\to\pi/2-} f(x)$ e $\lim_{x\to-\pi/2+} f(x)$;

iii) Provare che f è una funzione convessa sul suo dominio I.

Soluzione. i) Osserviamo prima di tutto che l'integrando ha limite per $t \to 0$:

$$\Big(\frac{1}{\cos t} - 1\Big)\frac{1}{t} = \frac{1-\cos t}{t\cos t} = \frac{o(t)}{t+o(t)} = o(1), \quad t \to 0$$

pertanto l'integrando è (estendibile ad) una funzione continua su I, e la $f(x)$ è ben definita come integrale di Riemann, per ogni $x \in I$. Poiché $\cos t$ è una funzione pari e $1/t$ è dispari, l'integrando è dispari e la funzione integrale $f(x)$ è pari (si ricordi che con il cambio di variabile $t = -s$, $dt = -ds$ si trova:

$$\int_0^x u(t)dt = \int_0^{-x} -u(-s)ds$$

cosicché se $u(t)$ è una funzione integrabile dispari la sua funzione integrale è pari).

ii) Poiché la funzione$f(x)$ è pari i due limiti sono uguali. Osserviamo poi che per $t \in [0, \pi/2[$ vale $1/t \geq 2/\pi$ per cui , confrontando con il noto integrale della funzione $1/\cos t$,

$$\lim_{x\to\pi/2-} f(x) = \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1}{\cos t} - 1\Big)\frac{1}{t}dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{\cos t} - 1\Big)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos t} - 1 = +\infty.$$

iii) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale f ha derivata

$$f'(x) = \Big(\frac{1}{\cos x} - 1\Big)\frac{1}{x}\ .$$

Derivando ancora, con semplici disuguaglianze si trova che f'' è positiva sul dominio, e quindi f è convessa: infatti, come è noto, vale $x \geq \sin x$ per $x \geq 0$, e perciò si ha anche, per ogni x reale, $x\sin x \geq \sin^2 x$, e quindi

$$f''(x) = \frac{\cos^2 x + x\sin x - \cos x}{x^2\cos^2 x} \geq \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{1-\cos x}{x^2\cos^2 x} \geq 0.$$

Variante. Si può osservare che $\big(\frac{1}{\cos x} - 1\big)\frac{1}{x}$ è il rapporto incrementale della funzione convessa $1/\cos x$ fra 0 e x, pertanto $f'(x) = \big(\frac{1}{\cos x} - 1\big)\frac{1}{x}$ è una funzione crescente e f è convessa.

Esercizio 2. Trovare delle costanti reali a, b, c e λ per cui si abbia, per $n \to +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \log^2 k = (a \log^2 n + b \log n + c) n^\lambda + o(n^\lambda)$$

Soluzione. Poiché le funzioni $\log x$ e $\sqrt{x}$ sono entrambe positive e *crescenti* sull'intervallo $[1, \infty[$ tale è anche la funzione $\sqrt{x} \log^2 x$. Quindi le sue somme inferiore e superiore relative alla suddivisione $P := \{1, 2, \ldots, n\}$ dell'intervallo di integrazione $[1, n]$ sono rispettivamente

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \log^2 k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \log^2 k - \sqrt{n} \log^2 n$$

e

$$S = \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} \log^2 k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \log^2 k.$$

Inoltre, con la sostituzione $\log x = u$, $x = e^u$, $dx = e^u du$ si trova per l'integrale:

$$\int_1^n \sqrt{x} \log^2 x dx = \int_0^{\log n} e^{3u/2} u^2 du = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \int_0^{3(\log n)/2} e^v v^2 dv =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Big[e^v (v^2 - 2v + 2) \Big]_{v=0}^{v=3(\log n)/2} = \left(\frac{2}{3} \log^2 n - \frac{8}{9} \log n + \frac{16}{27} \right) n^{3/2} - \frac{16}{27}$$

Da queste relazioni e dalle disuguaglianze $s \leq \int_1^n \sqrt{x} \log^2 x dx \leq S$ si ottiene perciò

$$\left(\frac{2}{3} \log^2 n - \frac{8}{9} \log n + \frac{16}{27} \right) n^{3/2} - \frac{16}{27} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \log^2 k \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{3} \log^2 n - \frac{8}{9} \log n + \frac{16}{27} \right) n^{3/2} + n^{1/2} \log^2 n - \frac{16}{27}$$

e quindi, poiché le due espressioni ai lati delle disuguaglianze differiscono per $n^{1/2} \log^2 n = o(n^{3/2})$, si ha anche

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \log^2 k = \left(\frac{2}{3} \log^2 n - \frac{8}{9} \log n + \frac{16}{27} \right) n^{3/2} + o(n^{3/2}) \ .$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 19/09/2016. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la funzione della variabile reale $x \in]-1,1[$.

$$u(x) := \log \frac{1+x}{(1-x)^\lambda}$$

Dire **(i)** per quali valori del parametro reale λ essa è convessa su $]0,1[$, rispettivamente **(ii)** su $]-1,1[$.

Soluzione. La derivata seconda della funzione $u(x)$, scritta nella forma $u(x) = \log(1+x) - \lambda \log(1-x)$ è

$$u''(x) := -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{\lambda}{(1-x)^2}$$

perciò per un dato x nel dominio di u si ha $u''(x) \geq 0$ se e solo se

$$\lambda \geq \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \ .$$

Quindi u è convessa in un dato intervallo $J \subset]-1,1[$ se e solo se vale la disuguaglianza precedente per ogni $x \in J$, vale a dire

$$\lambda \geq \sup_{x \in J} \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$$

(si ricordi la definizione di estremo superiore). Per $J =]0,1[$ l'estremo superiore vale 1 e per $J =]-1,1[$ l'estremo superiore vale $+\infty$. La risposta è dunque: **(i)** per ogni $\lambda \geq 1$; **(ii)** per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$. (Nel secondo caso si noti anche che, qualunque sia λ, la funzione $u(x)$ non può essere convessa in $]-1,1[$ perché $\lim_{x\to-1} u(x) = -\infty$).

Esercizio 2. Dire se esiste un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tale che

$$\lim_{x\to 1} \frac{p(x)\cot(\pi x) - \log x}{(x-1)^3} = 0 \ .$$

In caso affermativo esibirlo, determinando i coefficienti a, b, c, d.

Soluzione. Poiché per $x \to 1$

$$\frac{\cot(\pi x)p(x) - \log x}{(x-1)^3} = \frac{x-1}{\tan(\pi x)} \frac{p(x) - \tan(\pi x)\log x}{(x-1)^4} = \Big(\frac{1}{\pi} + o(1)\Big) \frac{p(x) - \tan(\pi x)\log x}{(x-1)^4} \ ,$$

il limite considerato è nullo se e solo se $\log x \tan(\pi x) = p(x) + o((x-1)^4)$ per $x \to 1$, cioè $p(x)$ è il polinomio di Taylor d'ordine 4 della funzione $\tan(\pi x)\log x$ in $x = 1$. Dai noti sviluppi in $x = 1$

$$\tan(\pi x) = \tan(\pi(x-1)) = \pi(x-1) + \frac{\pi^3}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$
$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

si ottiene

$$\tan(\pi x)\log x = \pi(x-1)^2 + \frac{\pi}{2}(x-1)^3 + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right)(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

e quindi $p(x) = \pi(x-1)^2 + \frac{\pi}{2}(x-1)^3 + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right)(x-1)^4$, da cui, sviluppando, i coefficienti

$$a = \frac{11}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi^3, \qquad b = -\frac{29}{6}\pi - \frac{4}{3}\pi^3, \qquad c = \frac{9}{2}\pi + 2\pi^3, \qquad d = -\frac{11}{6}\pi - \frac{4}{3}\pi^3 \ .$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$$

Soluzione. Con il cambio di variabile $x = u^{2/3}$, $dx = (2/3)u^{-1/3}$ si trova per $T \to +\infty$

$$\int_0^T \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{T^{3/2}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\Big(\frac{\pi}{2} + o(1)\Big)$$

da cui il valore dell'integrale improprio $\pi/3$.