Introduzione

Queste note sono da considerarsi un commento ai primi tre capitoli del libro di H. Cartan sulle funzioni di una variabile complessa: descrivono le parti che a lezione sono state trattate in più o in modo diverso da tale testo, più alcuni "commenti" che sono da consiserarsi facoltativi, ossia non del programma di esame.
L'oggetto di studio sono certe funzioni di variabile complessa che possono essere introdotte in due modi equivalenti ma a prima vista molto diversi tra loro:
- come funzioni localmente rappresentabili come somma di una serie di potenze: dette allora "funzioni analitiche"
- come funzioni differenziabili in senso complesso: dette allora "funzioni olomorfe"
Le definizioni iniziali e qualche proprietà sono qui date per funzioni di più varabili complesse; restringendoci poi come il Cartan al caso di una sola variabile.

Capitolo I

Sommazione di serie.
Sia $f : X \to \mathbb{C}$ una funzione. Per $\Delta \subset X$ finito, $\sum_\Delta f$ è definito come la somma degli $f(x)$ per $x \in \Delta$. Diremo che f è *sommabile* su X se esiste $L \in \mathbb{C}$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\Delta_0 \subset X$ finito tale che per ogni sottoinsieme finito $\Delta_0 \subset \Delta \subset X$ si abbia $|\sum_\Delta f - L| < \epsilon$. Tale L, che ovviamente è univocamente determinato nel caso che esista, verrà detto *somma* di f su X e scriveremo $\sum_X f = L$.

Esercizio $f : X \to \mathbb{C}$ è sommabile su X se e solo se $|f|$ lo è. Questo enunciato è più facilmente dimostrabile per funzioni a valori reali. Rimane comunque valido per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ ma è falso se i valori sono presi in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Infatti ad esempio se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert, la serie $\sum_1^n (e_n/n)$ è convergente nel senso sopra definito ma non è assolutamente convergente.

In modo analogo a quello seguito nel caso delle successioni reali si dimostra che una $f : X \to \mathbb{C}$ è sommabile se e solo se è di Cauchy nel senso seguente: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\Delta_0 \subset X$ finito tale che per ogni sottoinsieme finito Δ di X con $\Delta \cap \Delta_0 = \emptyset$ si abbia $|\sum_\Delta f| < \epsilon$.

Proposizione 1 *Siano $f : X \to \mathbb{C}$ sommabile e $(X_i)_{i\in I}$ una partizione di X. Allora per ogni $i \in I$ la funzione $f|_{X_i}$ è sommabile su X_i e detta L_i la sua somma la funzione $i \to L_i$ è sommabile su I e si ha $\sum_X f = \sum_I L_i$.*

La dimostrazione, del tutto ovvia come quella della proposizione che segue, è lasciata per esercizio.

Proposizione 2 *Siano $f : X \to \mathbb{C}$ e $g : Y \to \mathbb{C}$ sommabili. Allora:*

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{C}$$

è una funzione sommabile che sarà indicata con $f \times g$. Si ha inoltre:

$$\sum_{X\times Y}(f\times g)=(\sum_X f)(\sum_Y g)$$

Nel caso di serie di funzioni, ossia se si ha una applicazione $f: X\times T\to\mathbb{C}$ ove $t\in T$ è considerato come parametro, si introduce in modo evidente la nozione di sommabilità uniforme. Un caso speciale in cui ciò avviene è il caso in cui esiste una funzione sommabile $g: I\to[0,+\infty[$ che *maggiora* la f nel senso che $|f(x,t)|\leq g(x)$ per ogni $x\in X$ e $t\in T$; diremo in tal caso che f (o la serie $\sum_{i\in I}f(i)$) è *totalmente sommabile.* Il caso delle serie di potenze rientra in questo schema: si prende $X=\mathbb{N}^n$ e, utilizzando notazioni multiindice, si fissa una costante $a_I\in\mathbb{C}$ per ogni $I\in\mathbb{N}^n$. Per ogni $z\in\mathbb{C}^n$ si ha una funzione $\mathbb{N}^n\ni I\to a_I z^I\in\mathbb{C}$: l'insieme degli $z\in\mathbb{C}$ per i quali essa è sommabile sarà detto l'*insieme di convergenza* della serie $\sum_{I\in\mathbb{N}^n}a_I Z^I$ e la parte interna di questo il *dominio di convergenza* della serie.

Indicheremo con $\mathbb{C}[[T_1,\ldots,T_n]]$ l'anello delle serie formali $\sum_{I\in\mathbb{N}^n}a_I T^I$ e con $\mathbb{C}\{T_1,\ldots,T_n\}$ il sottoanello costituito dalle serie con dominio di convergenza non vuoto (quanto precede mostra che si tratta effettivamente di un sottoanello). Per $\underline{z}\in\mathbb{C}^n$ ed $r=(r_1,\ldots,r_n)\in]0,+\infty[^n$ il *policilindro* di centro $\underline{z}$ e raggio r è l'insieme $P(\underline{z};r)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_i-\underline{z}_i|<r_i \text{ per } i=1,\ldots,n\}$. La sua chiusura è chiamata *policilindro chiuso* ed indicata con $\bar{P}(\underline{z};r)$.

Lemma 3 *Se la serie di potenze $\sum a_I T^I$ è sommabile in $z=(z_1,\ldots,z_n)$, allora essa è totalmente sommabile sul policilindro $\bar{P}(0,r)$ ove $r=(|z_1|,\ldots,|z_n|)$. In particolare (vedi gli usuali teoremi di analisi) la sua somma è una funzione continua su tale policilindro.*

Corollario 4 *Il dominio di convergenza di una serie di potenze su $\mathbb{C}^n$ è una unione di policilindri (aperti).*

Nel caso $n=1$ il dominio di convergenza è un disco (eventualmente di raggio nullo o infinito) perché in tal caso i policilindri (=dischi) sono totalmente ordinati dall'inclusione. Per $n\geq 2$ ciò non è più vero. Comunque il dominio di convergenza non può essere una arbitraria unione di policilindri. Esso deve infatti possedere la seguente importante proprietà:
Def: diremo che un aperto $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ è *logaritmicamente convesso* se risulta convesso in $\mathbb{R}^n$ l'insieme costituito dalle $n-$uple $(\log|z_1|,...,\log|z_n|)$ per $(z_1,...,z_n)$ che appartiene ad Ω ed ha tutte le componenti non nulle.

Proposizione 5 *Il dominio di convergenza di una serie di potenze è un aperto logaritmicamente convesso*

Dim. Sia $\sum a_I T^I\in\mathbb{C}\{T_1,...,T_n\}$ convergente nei punti $z,w\in\mathbb{C}^n$. Allora le quantità $a_I z^I$, $a_J w^J$ per $I,J\in\mathbb{N}^n$ sono limitate da una costante $M\in\mathbb{R}^+$. Per $0\leq\lambda\leq 1$ maggioriamo i termini della data serie nel punto $t=z^\lambda w^{1-\lambda}$:

$$|a_I t^\lambda|=|a_I^\lambda z^\lambda|\cdot|a_I^{1-\lambda}w^{1-\lambda}|\leq M^\lambda\cdot M^{1-\lambda}=M$$

La dimostrazione è allora conclusa dal seguente:

Lemma 6 *Il dominio di convergenza di una serie di potenze $\sum a_I T^I$ è la parte interna dell'insieme degli $z \in \mathbb{C}^n$ per cui $\{a_I z^I \ : \ I \in \mathbb{N}^n\}$ è limitato. In particolare un policilindro di centro 0 è contenuto nel dominio di convergenza di una serie $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I$ se e solo se lo è in quello della serie $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} |a_I| T^I$*

Dim. Utilizzando la convergenza della serie geometrica, come per una variabile, si verifica che se gli $a_I z^I$ sono equilimitati, la serie converge assolutamente in ogni $\bar{z} \in \mathbb{C}^n$ tale che $|\bar{z}_i| < |z_i|$ per $i = 1, ..., n$.

Funzioni analitiche

Def. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è detta *analitica* se è sviluppabile in serie di potenze all'intorno di ogni $z_0 \in \Omega$; ossia se per ogni tale z_0 esiste una serie di potenze $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I$ ed un intorno U di z_0 in Ω tale che per $z \in U$ la serie $\sum a_I (z - z_0)^I$ sia sommabile ed abbia per somma $f(z)$.

Proposizione 7 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ il dominio di convergenza di una serie di potenze $S = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I \in \mathbb{C}\{T_1, ..., T_n\}$; allora la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ somma di S è analitica su Ω*

La dimostrazione segue dal seguente lemma più preciso:

Lemma 8 *Sia $S = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I \in \mathbb{C}\{T_1, ..., T_n\}$ convergente sul policilindro P di centro 0 e raggio $r = (r_1, ..., r_n)$. Se $\underline{z} \in P$, esiste una serie $S' = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} b_J T^J \in \mathbb{C}\{T_1, ..., T_n\}$ convergente sul policilindro Q di centro 0 e raggio $s = (s_1, ..., s_n)$ ove $s_\lambda = r_\lambda - |\underline{z}_\lambda|$ e tale che per $h \in Q$ si ha l'eguaglianza $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I (\underline{z} + h)^I = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} b_J h^J$*

Dim. A parte la complicazione delle notazioni, la dimostrazione nel caso generale è identica a quella del caso $n = 1$ che riportiamo. Consideriamo per $h \in Q$ la serie $R = \sum_{(m,i) \in H} a_m \binom{m}{i} \underline{z}^{m-i} h^i$ ove $H = \{(m, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ 0 \leq i \leq m\}$. Se mostriamo che essa è sommabile, possiamo sommarla raccogliendo prima i termini con un dato z^n e poi sommando in n ed otteniamo la somma della serie S, oppure raccogliendo prima quelli con un dato h^i e poi sommare in i avremo costruito la serie cercata S'. Ed infatti moltiplicando h per un numero complesso di modulo 1 si ottiene un $\underline{h}$ per cui $|h| = |\underline{h}|$ e $|\underline{z} + \underline{h}| = |\underline{z}| + |\underline{h}|$ (ossia $\underline{z}$ e $\underline{h}$ hanno lo stesso "angolo"). Siccome $\underline{z} + \underline{h} \in P$, la serie S è sommabile, quindi assolutamente sommabile; svolgendo i termini di questa con la formula binomiale si ottiene proprio la serie R.

L'esponenziale come funzione analitica. Per $z \in \mathbb{C}$ poniamo:

$$exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Tale serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{C}$; quindi exp è ben definita e continua e viene detta *funzione esponenziale*; essa soddisfa la relazione fondamentale seguente: per $a, b \in \mathbb{C}$

$$exp(a + b) = exp(a) \cdot exp(b)$$

Tale relazione si verifica direttamente mostrando che i termini che si ottengono eseguendo il prodotto delle serie che esprimono il secondo membro possono essere

raggruppati (utilizzando la formula binomiale) in modo da fornire la serie che dà il primo membro. Ciò è corretto perchè si tratta di serie assolutamente convegenti (v. l'appendice sulla sommazione delle serie).
Si ha evidentemente $exp(0) = 1$ e quindi $exp(z) \cdot exp(-z) = 1$; se ne deduce che exp è in effetti una applicazione del gruppo additivo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ dei numeri complessi non nulli e la relazione di sopra asserisce che essa è un omomorfismo di gruppi.

Osservando che la serie data è a coefficienti reali si ottiene anche la seguente relazione: per $a \in \mathbb{C}$

$$exp(\bar{z}) = \overline{exp(z)}$$

Ne segue che se z è reale anche $exp(z)$ lo è e che se z è puramente immaginario, e quindi $\bar{z} = -z$, allora $exp(z)$ moltiplicato per il proprio coniugato dà 1 ossia esso è un numero complesso di modulo 1.

Notazione: si pone $e = exp(1)$; esso è un numero reale maggiore di uno che viene detto *numero di* Nepero. La funzione esponenziale viene spesso indicata con la notazione $exp(z) = e^z$.

Si sono così ottenuti omomorfismi (continui) di gruppi:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^t \in \mathbb{R}^*$$

e

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in S^1$$

ove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ è il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli ed S^1 è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo uno.
Per studiare le proprietà che tali omomorfismi devono necessariamente avere utilizzeremo il fatto che S^1 è una sottovarietà differenziabile di dimensione uno in $\mathbb{C}$, che è compatta e connessa (ad esempio perchè immagine di $\mathbb{C}^*$ per l'applicazione continua $z \mapsto z/|z|$) e che tali omomorfismi non sono costanti. Faremo uso anche dei seguenti principi generali:
- ogni sottogruppo H di un gruppo topologico G che abbia punti interni è aperto e chiuso in G. Infatti essendo le traslazioni di G in se degli omeomorfismi, se H ha un punto interno tutti i suoi punti saranno interni e quindi esso è aperto; il complementare sarà anch'esso aperto perchè unione di classi laterali ciascuna delle quali essendo ottenuta da H per traslazione è aperta.
- ogni applicazione continua localmente iniettiva tra varietà topologiche di dimensione uno è aperta. Infatti basterà dimostrare che essa è localmente aperta; utilizzando carte locali siamo ricondotti a considerare l'enunciato per funzioni continue tra intervalli in $\mathbb{R}$ e la dimostrazione si fa allora usando semplici argomenti di connessione.
Essendo $\mathbb{R}$ connesso, l'immagine di $t \mapsto e^t$ deve essere la componente connessa di $\mathbb{R}^*$ che contiene 1; quindi tale omomorfismo è surgettivo sui reali positivi. Esso deve essere anche iniettivo perchè se $T \neq 0$ fosse nel suo nucleo, esso sarebbe fattorizzabile tramite $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/(\mathbb{Z}\ T)$ ed avrebbe quindi immagine compatta. Si è così trovato che l'esponenziale induce un isomorfismo tra il gruppo additivo dei reali ed il gruppo moltiplicativo dei reali positivi. Analogamente $t \mapsto e^{it}$ dovrà essere surgettivo su S^1. Il suo nucleo deve essere un sottogruppo proprio chiuso; non può essere il gruppo nullo perchè altrimenti si avrebbe un isomorfismo che essendo una applicazione iniettiva tra varietà di dimensione uno sarebbe aperto

e quindi un omeomorfismo; ciò non è possibile perché S^1 è compatto mentre $\mathbb{R}$ non lo è. Quindi tale nucleo consiste dei multipli di un numero reale positivo; la metà di questo viene chiamato *pi greco* ed indicato con π.
Segue da tutto ciò che si ha una successione esatta:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{C} \xrightarrow{exp} \mathbb{C}^* \to 0$$

ove j è l'inclusione definita da $j(n) = 2\pi in$.

Le componenti di e^{it} per $t \in \mathbb{R}$ sono per definizione le funzioni *coseno* e *seno* indicate rispettivamente cos e sin. Per $t \in R$ si ha quindi:

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

Dalla serie di potenze che definisce la funzione esponenziale si ottengono immediatamente gli sviluppi in serie di potenze delle funzioni seno e coseno.

Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ si ha per $h \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_0+h} - e^{z_0} = e^{z_0}(e^h - 1)$$

essendo $e^h - 1 = h+$ termini del secondo ordine, si ottiene che l'esponenziale ha per differenziale primo nel punto z_0 la moltiplicazione (complessa) per e^{z_0}. Tale differenziale primo è quindi fattorizzabile con l'esponenziale e con l'applicazione che ad un numero complesso a associa la applicazione $h \to ah$ considerata come applicazione $\mathbb{R}-$lineare di $\mathbb{C}$ in se. Ne segue che l'esponenziale è C^∞. Alternativamente l'espressione trovata per il differenziale dell'esponenziale dice che le funzioni reali e^t , $\cos(t)$ e $\sin(t)$ hanno per derivate rispettivamente le funzioni e^t , $-\sin(t)$ e $\cos(t)$ e che quindi sono tutte differenziabili infinite volte. Essendo $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ se ne deduce anche la infinita differenziabilità dell'esponenziale.

Precisiamo alcune nozioni supposte note nella argomentazione precedente:
- *Gruppo topologico.* E' un insieme G con due strutture: di spazio topologico e di gruppo compatibili nel senso che le applicazioni $G\times \ni (x,y) \mapsto xy \in G$ e $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ sono continue (ovviamente su $G \times G$ consideriamo la topologia prodotto). In particolare ne segue che per ogni fissato $y \in G$ le applicazioni $G \ni x \mapsto xy \in G$ (traslazione a destra per y) e $G \ni x \mapsto yx \in G$ (traslazione a destra per y) sono omeomorfismi di G in se. Ad esempio l'insieme dei numeri complessi di modulo 1, che solitamente è indicato con S^1, è un gruppo topologico (la moltiplicazione è indotta dalla struttura moltiplicativa di $\mathbb{C}$ e la topologia dala topologia di $\mathbb{C}$ identificato con $\mathbb{R}^2$). Che esso sia connesso segue ad esempio dal fatto che è un retratto di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ (per la retrazione $z \mapsto z/|z|$). Che è una "varietà differenziabile di dimensione uno" sembra non noto dai corsi precedenti. In effetti abbiamo utilizzato solo il fatto che è uno spazio topologico localmente omeomorfo ad aperti di $\mathbb{R}$; ciò si deduce osservando che in termini delle componenti reale ed immaginaria $z = x + iy$ dei numeri complessi, tale gruppo è definito dall'equazione $x^2+y^2 = 1$: il cosiddetto "teorema delle funzioni implicite" dà parametrizzazioni locali di esso che sono appunto omeomorfismi tra un intervallo reale con un intorno del punto in cui si "esplicita" la relazione. L'applicazione $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in s^1$ è continua e non

costante: per questioni di connessione la sua immagine deve contenere almeno un punto interno; essendo tale immagine "omogenea" (perchè le traslazioni per suoi elementi sono omeomorfismi di S^1 in se che agiscono transitivamente sui suoi elementi) essa è un aperto di S^1. Abbiamo già osservato che un sottogruppo aperto di un gruppo topologico è anche chiuso ed essendo S^1 connesso si deduce che $t \mapsto e^{it}$ è surgettiva da $\mathbb{R}$ ad S^1.

- I sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}$ sono solo (0) , $\mathbb{R}$ e per T positivo il sottogruppo $\mathbb{Z}T$ dei suoi multipli interi. Lo si dimostri per esercizio (dovrebbe essere stato dimostrato anche nel corso di analisi, quando si studiano le funzioni periodiche). Più avanti comunque dovremmo caratterizzare i sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}^n$ che è un pochino più laborioso da fare.

Capitoli II e III

Differenziabilità reale e complessa
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{R}$. Fissando una base su V si ottiene una identificazione di esso con $\mathbb{R}^n$ e quindi una norma su esso, corrispondente a quella euclidea su $\mathbb{R}^n$. A due basi diverse corrispondono norme che in genere saranno diverse, ma "equivalenti" nel senso che sono maggiorabili l'una con un multiplo positivo dell'altra. In particolare le topologie indotte su V da tali norme sono tutte eguali tra loro.
Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ ed $F : \Omega \to W$ una applicazione, ove Ω è un aperto di V. Ricordiamo che F è detta *differenziabile* in un punto $x_0 \in \Omega$ se esiste una applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $\lim_{h \to 0}(F(x_0 + h) - F(x_0) - L[h])/||h|| \ = 0$; tale L se esiste è univocamente determinata da tale condizione ed è detta il *differenziale* di F in x_0 ed indicata con $dF(x_0)$. Il valore $dF(x_0)[v]$ di tale differenziale in un punto $v \in V$ è la *derivata direzionale* di F rispetto a v ossia il $\lim_{t \to 0}(F(x_0 + tv) - F(x_0))/t$. Se F è differenziabile in ogni punto di Ω, si ha quindi una applicazione $dF : \Omega \to Hom(V, W)$; se questa è continua, la F è detta di classe C^1; la F è detta di classe C^2 se dF è di classe C^1; per induzione si definiscono così le applicazioni di classe C^k per $k \in \mathbb{N}$ o $k = \infty$.
Siano ora V, W spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{C}$; in particolare essi sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Diremo che una applicazione $F : \Omega \to W$, ove Ω è un aperto di V, è *differenziabile in senso reale* se lo è considerando V, W come spazi vettoriali reali; diremo che è *differenziabile in senso complesso* se lo è in senso reale e se inoltre il suo differenziale $dF(z_0)$, che è una applicazione $\mathbb{R} -$ *lineare* di V in W, è $\mathbb{C}-$lineare. Se ciò accade, non solo F ha derivate direzionali $dF(z_0)[v]$ rispetto ad ogni $v \in V$, ma si ha anche che esistono le *derivate direzionali* complesse, definite come prima ma con t che tende a zero tra i numeri complessi anziché solo tra quelli reali; ciò equivale, per F differenziabile in senso reale, al verificarsi di certe relazioni tra le derivate reali che possono essere esplicitate così : siano $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}^m$ le componenti reale ed immaginaria di F di modo ché $F = P + iQ$ e dette $z_1, ..., z_n$ coordinate complesse su V siano x_h, y_h le parti reale ed immaginaria di z_h, cosicché $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ sono coordinate su V considerato come spazio vettoriale sui reali. La condizione di differenziabilità in senso complesso (supposta verificata quella in senso reale)

equivale alle eguaglianze:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

che vengono dette *equazioni di Cauchy-Riemann*.
Esaminiamo in particolare il caso $n = 1$. Sia quindi $F : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ differenziabile in un punto z_0. Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ ponendo $z = x + iy$ con x, y reali. Il differenziale (reale) di F in z_0 è una applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$; essa è $\mathbb{C}-$lineare se e solo se è composizione di una dilatazione, ossia la moltiplicazione per un numero reale $r \geq 0$, con una rotazione di angolo α: tale è appunto la moltiplicazione, per la struttura complessa di $\mathbb{R}^2$, per il numero complesso $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Se $r > 0$, ossia $w \neq 0$, tale applicazione lineare è una *similitudine* su $\mathbb{R}^2$ per la sua struttura euclidea. Geometricamente ciò significa che se due curve differenziabili passano per z_0 formando un angolo θ allora le loro trasformate per F sono due curve differenziabili passanti per $F(z_0)$ e formanti in tal punto ancora un angolo θ: per questa ragione una tale funzione è detta *conforme* in z_0 intendendo che "conserva gli angoli".

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ aperti ed $f : A \to B$ una applicazione di classe C^k. Essa è detta *localmente invertibile* in $x_0 \in A$ se esiste un aperto U con $x_0 \in U \subset A$ tale che:
1. $V = f(U)$ è aperto
2. $f : U \to V$ è biunivoca
3. $f^{-1} : V \to U$ è differenziabile di classe C^k

Diremo anche che $f : U \to V$ è un diffeomorfismo. Dall'analisi supponiamo noto che per $k \geq 1$ ciò è vero se e solo se $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un isomorfismo (teorema di inversione locale); dall'algebra lineare si ha che ciò può accadere solo se $n = m$, risultato abbastanza più difficile da dimostrare per $k = 0$. Siano $A, B \subset \mathbb{C}^n$ aperti ed $f : A \to B$ differenziabile in senso complesso e di classe C^1 in senso reale. Sia $df(x_0)$ un isomorfismo in un punto $x|0 \in A$ e quindi un diffeomorfismo tra due aperti U, V con $x_0 \in U$; essendo $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$ avremo che $f^{-1} : V \to U$ è anche differenziabile in senso complesso. Vediamo alcune conseguenze di ciò:
1. Sia $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_0$ un polinomio a coefficienti complessi pensato come applicazione di $\mathbb{C}$ in se. La *derivata* $P'(z)$ di P può essere definita formalmente come il polinomio $na_0 z^{n-1} + ... + a_1$ (può essere definita per polinomi a coefficienti in un anello qualsiasi). Sviluppando con la formula binomiale $P(z + h)$ si ha:

$$P(z + h) = P(z) + P'(z) \cdot h + R(z, h) \cdot h^2$$

ove $R(z, h)$ è un polinomio in z, h. Ciò mostra che P è differenziabile nel punto z e che è $dP(z)[h] = P'(z) \cdot h$. ne segue che:
1. P è differenziabile in senso complesso
2. P è di classe C^∞
3. P è localmente invertibile in senso complesso in tutti i punti in cui $P'(z) \neq 0$

Sia C l'insieme degli zeri di $P'(z)$; poniamo $\Delta = P(C)$ e $\Sigma = P^{-1}(\Delta)$. Evidentemente Δ, Σ sono insiemi finiti e si verifica facilmente che $P : \mathbb{C} - \Sigma \to \mathbb{C} - \Delta$ è un rivestimento di grado n. In particolare su ogni aperto semplicemente connesso in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, esiste una funzione h differenziabile in senso complesso (e C^∞ dal punto di vista reale) tale che $h(z)^n = z$; ogni altra tale funzione sarà del tipo $\omega h(z)$ ove ω è una radice $n-$esima dell'unità.

Nel caso reale vi sono alcuni corollari del teorema di inversione locale, tra cui quello detto "delle funzioni implicite". Valgono gli analoghi nel caso complesso con dimosstrazioni formalmente identiche. Se ne deduce ad esempio che se $P(w, z)$ è un polinomio in w, z a coefficienti complessi, nullo in (w_0, z_0) e tale che $\partial P(w_0, z_0)/\partial w \neq 0$ (anche qui la "derivata partiale potendo essere definita formalmente), allora esistono intorni aperti V, U di w_0, z_0 in $\mathbb{C}$ ed una funzione $h : U \to V$ differenziabile in senso complesso tale che $\{(w, z) \; : \; P(w, z) = 0\} = \{(z, h(z) \; : \; z \in U\}$. Vedremo più avanti che se P è irriducibile (nell'anello dei polinomi $\mathbb{C}[w, z]$ e dipende effettivamente da w, allora il suo luogo di zeri in $\mathbb{C}^2$ (la "curva algebrica di equazione $P = 0$) ha una proiezione sull'asse z che "quasi un rivestimento", nel senso che diviene un rivestimento togliendo ad essa ed a $\mathbb{C}$ un numero finito di punti. Una inversa locale di un tale rivestimento è una funzione differenziabile in senso complesso che può essere chiamata "funzione algebrica"; lo studio di un tale tipo di funzioni (ad esempio anche solo la precisazione di cosa sia il suo "dominio naturale di definizione") ha richiesto l'introduzione di moltissimi nuovi strumenti matematici sia in algebra che in analisi e geometria.

Forme differenziali reali e complesse
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in ogni punto di un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Il suo differenziale associa ad ogni $x \in \Omega$ una applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che viene indicata con $df(x)$ ed il cui valore in un $h \in \mathbb{R}^n$ indicheremo con $df(x)[h]$ per sottolineare la diversità delle due variabili: in effetti df può essere considerata come una funzione su $\Omega \times \mathbb{R}^n$ che è lineare nel secondo argomento. Se f è la $i-$esima coordinata, il suo differenziale dx_i è in ogni punto di Ω la proiezione sull'asse $i-$esimo; è ben noto che ogni f differenziabile ha derivate parziali e che si ha $df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n$.

Def. Chiameremo *forma differenziale di grado* 1 (o semplicemente: *forma*) su Ω ogni applicazione ω avente dominio Ω e codominio le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Il loro insieme costituisce uno spazio vettoriale reale (si possono sommare e moltiplicare per uno scalare) anzi, possono essere moltiplicate anche per una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Siccome le proiezioni $dx_1, ..., dx_n$ sugli assi formano una base del duale di $\mathbb{R}^n$, ogni forma si scrive in modo unico come combinazione $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ con $a_1, ..., a_n$ funzioni reali su Ω. Diremo che tale ω è di *classe* C^k se tali sono le funzioni a_1, ossia se queste hanno derivate continue sino all'ordine k (ciò equivale d'altra parte a richiedere che l'applicazione $\omega : \Omega \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sia differenziabile di classe C^k).
Se $n = 1$, ogni forma $\omega = a(x)dx$ che sia continua è il differenziale di di una funzione f di classe C^1 (esistenza della primitiva). Ciò non è più vero per $n \geq 2$; ad esempio non esiste una funzione $f(x, y)$ avente per differenziale $\omega = ydx$.
Def. Una forma continua ω su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ è detta:
- *esatta* (o *integrabile*) se esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $df = \omega$; in tal caso f è detta una *primitiva* di ω.
- *chiusa* (o *localmente integrabile* se ogni $x \in \Omega$ ha un intorno aperto sul quale essa è esatta.
Le forme esatte sono un sottospazio vettoriale di quelle chiuse; il quoziente di

tali spazi è detto *coomologia* di Ω e sarà indicato con $H(\Omega, \mathbb{R})$ (più precisamente dovrebbe essere chiamata *coomologia di de Rham di grado 1 a coefficienti reali* ed essere indicata con $H^1_{dR}(\Omega, \mathbb{R})$ per distinguerla da altri tipi di coomologia che però qui non considereremo).
Si possono considerare anche forme "a coefficienti complessi" $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ ove le a_i sono funzioni su Ω a valori complessi; ogni tale ω ha una scrittura unica $\omega = \alpha + i\beta$ ove α, β sono forme reali. La coomologia in tal caso sarà indicata con $H(\Omega, \mathbb{C})$ ed è isomorfa al complessificato di $H(\Omega, \mathbb{R})$ (il *complessificato* di una spazio vettoriale V è lo spazio costituito dalle scritture formali $v + 1w$ con $v, w \in V$ e dotato della ovvia struttura di spazio vettoriale complesso; esso può essere intrinsecamente definito in termini di ovvie proprietà funtoriali od ancora come $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$).

Integrazione delle forme
Sia $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ una forma continua su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è un cammino di classe C^1, ossia $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ con le $x_i(t)$ dotate di derivata prima continua $\dot{x}_i$, definiamo

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (a_1(\gamma(t))\dot{x}_1(t) + ... + a(n(\gamma(t))\dot{x}_n(t))dt$$

Questa nozione può essere estesa a cammini γ del seguente tipo più generale: diremo che $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è C^1 *a tratti* se esiste una decomposizione $a = t_0 \leq ... \leq t_n = b$ tale che γ sia C^1 su ogni $[t_{i-1}, t_i]$; l'integrale di una forma continua ω su un tale cammino si definisce come la somma dei suoi integrali sulle restrizioni di γ agli intervalli della decomposizione: è chiaro che tale definizione è ben posta, nel senso che non dipende dalla particolare decomposizione scelta (additività dell'integrale).

Lemma 9 *Siano f di classe C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un cammino C^1 a tratti. Allora $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$*

Dim. Si applichi la definizione data di $\int_\gamma df$ e si utilizzi la formula di derivazione di funzione composta.

Lemma 10 *Una forma continua $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è esatta se e solo se si ha $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino chiuso differenziabile a tratti*

Dim. Una implicazione segue dal precedente lemma. Per verificare l'altra supponiamo Ω sia connesso e fissiamo un suo punto base $*$. Definiamo $F : \Omega \to \mathbb{R}$ con la formula $F(x) = \int_\gamma \omega$ ove γ è un qualsiasi cammino C^1 a tratti da $*$ ad x (perché la definizione è ben posta? ossia: perché un tale γ esiste e perché l'integrale non dipende dal γ scelto?). Scrivendo opportunamente i rapporti incrementali di F si verifica che F ha derivate parziali in ogni punto e che queste coincidono con le componenti a_i.

Lemma 11 *Una forma $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ di classe C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è chiusa se e solo se sono verificate le relazioni $\partial a_i / \partial x_j = \partial a_j / \partial x_i$ per $i, j = 1, ..., n$*

Dim. Se localmente esiste una f di classe C^1 con $\partial f/\partial x_i = a_i$ allora f ha derivate prime di classe C^1 ed è quindi in effetti di classe C^2; per un noto teorema la matrice delle sue derivate seconde è simmetrica e ciò dimostra una delle implicazioni. Per l'altra si ha il seguente risultato più forte:

Lemma 12 *Se $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ è di classe C^1 su un aperto convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ essa è esatta se verifica le condizioni $\partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$*

Dim. Per semplicità di esposizione esamineremo solo il caso $n = 2$ (il caso generale si tratta per induzione in modo simile) e supporremo $0 \in \Omega$. Sia $\omega = adx + bdy$; per $(x,y) \in \Omega$ poniamo

$$F(x,y) = \int_0^x a(t,0)dt \;+\; \int_0^y b(x,t)dt$$

E' ovvio che $\partial F/\partial y = b$. Per la derivata rispetto ad x si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)dt$$

Per ipotesi $\partial b/\partial x = \partial a/\partial y$ e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)dt = a(x,0) + (a(x,y) - a(x,0)) = a(x,y)$$

Integrazione di forme chiuse su cammini continui

Per integrare una forma continua su un cammino è necessario che questo sia abbastanza regolare (ad esempio C^1 a tratti; basterebbe "rettificabile", ossia di lunghezza finita); l'integrale su una curva solo continua non può essere definito in modo sensato. Si può però estendere la nozione di integrale su curve continue restringendoci a integrare forme che siano chiuse nel modo che segue. Siano infatti ω una forma chiusa su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un cammino continuo. Scegliamo una decomposizione $a = t_0 \leq ... \leq t_n = b$ di $[a,b]$ tale che indicando per $i = 1, ..., n$ con $\gamma_i : [a,b] \to \Omega$ la restrizione di γ, si abbia che γ_i abbia immagine in un aperto $U_i \subset \Omega$ sul quale ω ha una primitiva $f_i : U_i \to \mathbb{R}$. Se γ è C^1, anche ogni γ_i lo è e sia ha:

$$\int_\gamma \omega = \sum_1^n \int_{\gamma_i} \omega = \sum_1^n f_i(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))$$

L'ultimo mebro ha senso anche se γ è solo C^0 e può essere preso come definizione di $\int_\gamma \omega$. La verifica che tale definizione è ben posta è fatta con ragionamenti abbastanza simili a quelli utilizzati per descrivere il gruppo fondamentale utilizzando un ricoprimento semplice: si utilizza il fatto ben noto che su un aperto connesso una funzione differenziabile è costante se ha il differenziale identicamente nullo o equivalentemente che su un tale aperto due primitive di una stessa forma differiscono per una costante.
Supponiamo fissato un ricoprimento semplice $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di Ω, ad esempio uno fatto di aperti convessi, e siano $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ un sistema di primitive locali per ω.

Per ogni $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sia $c_{ij} = f_j - f_i \in \mathbb{R}$, che chiameremo *salto di potenziale* da U_i a U_j. Se $i, j, k \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si avrà $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$. Fissato $i_0 \in I$ ed un punto base $* \in U_{i_0}$ abbiamo un isomorfismo tra $\pi_1(\Omega, *)$ ed il gruppo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$ costruito con i cammini formali su tale ricoprimento. Se $\gamma : [0,1] \to \Omega$ è un cammino continuo di origine $*$, l'integrale sopra definito $\int_\gamma \omega$ coincide con la somma dei salti di potenziale incontrati andando da U_{i_0} in se stesso lungo un cammino formale che rappresenta γ. Se ne deduce che tale integrale dipende solo dalla di omotopia di γ. Presisamente si ha la seguente:

Proposizione 13 *Sia omega una forma chiusa su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Per ogni cammino continuo $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è definito $\int_\gamma \omega \in \mathbb{R}$; esso dipende solo dalla classe di omotopia ad estremi fissi di γ. L'applicazione $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ induce quindi un omomorfismo di $\pi_1(\Omega, *) \to \mathbb{R}$; esso è l'omomorfismo nullo se e solo se ω è esatta. Si ha quindi una applicazione iniettiva $\nu : H(\Omega, \mathbb{R}) \to Hom(\pi_1(\Omega, *), \mathbb{R}$ che è un omomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$*

Commento. Si può verificare che ν è anche surgettiva e che quindi identifica la coomologia $H(\Omega, \mathbb{R})$ con lo spazio vettoriale $Hom(\pi_1(\omega, *), \mathbb{R})$. Infatti sia $\sigma : \pi_1(\Omega, *) \to \mathbb{R}$ un omomorfismo. Scegliamo come sopra un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di ω fatto di aperti convessi e scegliamo per ogni $i \in I$ un cammino formale γ_i da U_{i_0} ad U_i. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, consideriamo il cammino formale ottenuto percorrendo prima γ_i passando poi ad U_j e tornando ad U_{i_0} con γ_j^{-1}. Poniamo quindi $c_{ij} = \sigma(\gamma_{ij})$; si noti che se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si ha $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$. Scelta una partizione dell'unità differenziabile $(\phi_i)_{i \in I}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$ definiamo $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ con la formula $f_i = \sum c_{ij} \phi_j$ ove la somma è ristretta ai $j \in I$ per cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Si verifica che se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ su esso si ha $df_i = df_j$ e quindi che le $(df_i)_{i \in I}$ sono le restrizioni di una forma chiusa globale ω che ha le f_i come primitive locali. Si verifica infine che a tale ω è associato l'omomorfismo σ.

Funzioni olomorfe di una variabile

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ove Ω è un aperto in $\mathbb{C}$ è detta *derivabile in senso complesso* in un punto $z \in \mathbb{C}$ se esiste il limite per h complesso che tende a zero del *rapporto incrementale* $(f(z+h) - f(z))/h$; tale limite, se esiste, è detto la *derivata* di f in z ed è indicato con $f'(z)$. Diremo che f è *olomorfa* su Ω se è derivabile in ogni punto di Ω.

Come in una variabile reale, la derivabilità (complessa) in un punto equivale alla differenziabilità (complessa); in particolare implica la continuità di f in tale punto. Diversamente dal caso reale, in cui una funzione può essere derivabile in ogni punto, senza che tale derivata sia continua, dimostreremo che se f è olomorfa necessariamente anche $f'(z)$ lo è e quindi che essa è diffetrenziabile di classe $\mathbb{C}^\infty$; anzi si dimostra che una funzione è olomorfa se e solo se essa è analitica. Si ottengono questi risultati nel seguente modo (si vedano le dimostrazioni sul testo di H.Cartan):

- se f è olomorfa allora la forma differenziale $f(z)dz$ è localmente integrabile
- ciò è vero anche nell'ipotesi più debole che f sia continua e derivabile fuori di un insieme L che sia una "linea regolare" (come ad esempio una retta reale); in particolare se L è un solo punto
- formula di Cauchy: si integra su un cammino chiuso omotopo a zero in Ω la

forma $g(z)dz$ ove g "è" il rapporto incrementale di f in un punto z_0
- se f è olomorfa essa è sviluppabile in serie di potenze: nella formula di Cauchy si sviluppa l'integrando utilizzando la serie geometrica. Tale argomento dimostra anche che lo sviluppo in serie di una funzione olomorfa su un aperto Ω in un suo punto z_0 ha un raggio di convergenza maggiore o eguale alla distanza di z_0 dal bordo di Ω.

Superfici di Riemann
Una *superficie di Riemann* è uno spazio topologico connesso e di Hausdorff nel quale sono state selezionate certe coppie (U, z) dette *carte* aventi le seguenti proprietà:
1. ogni tale coppia è costituita da un aperto non vuoto U in X e da un omeomorfismo tra U ed un aperto $z(U)$ in $\mathbb{C}$
2. se (U_1, z_1) e (U_2, z_2) sono due carte esse sono *compatibili* nel senso che $U = U_1 \cap U_2$ o è vuoto oppure $z_2 \circ z_1^{-1}$ da $z_1(U)$ in $z_2(U)$ è olomorfa insieme alla sua inversa (si vedrà che l'inversa di una applicazione olomorfa biunivoca è automaticamente olomorfa)
3. per ogni $x \in X$ esiste una carta (U, z) con $x \in U$ e $z(x) = 0$ (diremo che z è una *coordinata* di centro x)
4. tale insieme di carte è massimale nel senso che se w è un omeomorfismo tra un aperto V di X ed un aperto di $\mathbb{C}$ che è compatibile con ogni carta data, allora (V, w) è una delle carte assegnate.

Sia X una superficie di Riemann; una funzione a valori complessi definita su un suo aperto Ω è olomorfa se per ogni carta (U, z) con $U \subset \Omega$, la funzione $f(z)$, ossia la composizione di f con l'inversa di $z : U \to z(U)$, è olomorfa. Una applicazione $\phi : X \to Y$ tra superfici di Riemann è *olomorfa* se è continua e per ogni aperto $V \subset Y$ ed ogni funzione olomorfa $f : V \to \mathbb{C}$, la funzione $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ è olomorfa; ciò equivale a dire che è continua e che le sue scritture locali tramite carte su X ed Y sono olomorfe.
Esempi:
1. Ogni aperto di una superficie di Riemann; ad esempio ogni aperto di $\mathbb{C}$
2. Se $\phi : X \to Y$ è un rivestimento ed Y è una superficie di Riemann, su X esiste una ed una sola struttura di superficie di Riemann per la quale ϕ è olomorfa 3. Sia X una superficie di Riemann e G un gruppo di suoi automorfismi (omeomorfismi olomorfi) che sia propriamente discontinuo e privo di punti fissi; allora su X/G esiste una ed una sola struttura di superficie di Riemann per la quale la proiezione $X \to X/G$ è olomorfa. Ad esempio $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ è una superficie di Riemann (la funzione esponenziale la identifica a $\mathbb{C}^*$. Se Γ è un sottogruppo discreto di rango due in $\mathbb{C}$ (ossia il sottogruppo generato da una base reale di $\mathbb{C}$) allora la superficie di Riemann $\mathbb{C}/\Gamma$ è detta un *toro complesso* di dimensione uno od anche una *curva ellittica*
4. La retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, detta anche *sfera di Riemann*. Si noti che le funzioni meromorfe su un aperto connesso Ω di $\mathbb{C}$ possono essere interpretate come le applicazioni olomorfe di ω in $\mathbb{P}^1$ che non sono l'applicazione costante ∞; nello stesso modo si possono definire le funzioni meromorfe su una superficie di Riemann X
5. Sia $P(W, Z) \in \mathbb{C}[W, Z]$ un polinomio di grado positivo a coefficienti complessi nelle lettere W, Z e sia X il suo luogo di zeri in $\mathbb{C}^2$. Supponiamo che in ogni punto di X una almeno delle derivate parziali di P rispetto a W e Z sia non nulla;

allora ogni componente connessa di X ha una unica struttura di superficie di Riemann nella quale le esplicitazioni locali (assicurate dall'ipotesi sule derivate) sono delle carte.
6. $F(z_0, z_1, z_2)$ un polinomio omogeneo in tre variabili a coefficienti complessi. E' ben definito il suo luogo di zeri X in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$: infatti se è nullo in un punto di $\mathbb{C}^3$, si annulla anche in tutti i suoi multipli per uno scalare. Utilizzando le tre carte standard U_0, U_1, U_2 su $\mathbb{P}^2$ (ricordiamo che U_i è l'aperto di $\mathbb{P}^2$ in cui $z_i \neq 0$), ognuna "uguale" a $\mathbb{C}^2$, si verifica che X è una superficie di Riemann se in ogni suo punto almeno una delle derivate parziali di F è diversa da zero (infatti in ogni tale carta la X è allora localmente il grafico di una funzione olomorfa come nell'esempio precedente).

Commento. Si può dimostrare che una tale X ha solo un numero finito di componenti connesse e che se P è irriducibile allora esso ha una sola componente connessa.

Sia f una funzione olomorfa su un disco U di centro $z_0 \in \mathbb{C}$; dal suo sviluppo in serie si deduce che se f non è identicamente nulla, esistono univocamente determinati $p \in \mathbb{N}$ ed una g olomorfa in U tali che $f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$; tale p è detto l'*ordine* di zero di f in z_0. Essendo la funzione $z \mapsto z^p$ localmente invertibile da $\mathbb{C}^*$ in se, esiste su un intorno aperto V abbastanza piccolo di z_0 in U una funzione olomorfa h tale che $h^p(z) = g(z)$ e si ha quindi $f(z) = ((z - z_0) \cdot h(z))^p$; la funzione $z \mapsto (z - z_0) \cdot h(z)$ è localmente invertibile in z_0 perché in tal punto ha derivata non nulla e può essere quindi utilizzata come coordinata locale: in tale coordinata la funzione f si scrive $z' \mapsto z'^p$. Si ha quindi

Lemma 14 (di rappresentazione locale)
Una funzione f olomorfa e non localmente costante all'intorno di un punto x di una superficie di Riemann X, può essere scritta, mediante una coordinata locale opportuna in tale punto, nella forma $z \mapsto c + z^p$ ove $c = f(z_0)$ e $p \in \mathbb{N}^+$ è la molteplicità di zero di $f(z) - f(z_0)$ in z_0 sono univocamente determinati da f e z_0

Commento. Il precedente lemma può essere dimostrato ragionando solo sulle serie: si mostri che se $T = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ è una serie formale con $a_0 \neq 0$ e b_0 è una costante tale che $b_0^p = a_0$, esiste una ed una sola serie formale S con termine costante b_0 e tale che $S^p = T$; si mostri quindi che se T è convergente (ossia ha raggio di convergenza non nullo, il che equivale all'esistenza di una costante positiva K tale che $a_n \leq K^n$ per $n \geq 0$) allora anche S lo è. Ragionare solo per serie permette di estendere risultati, come ad esempio questo, al caso di serie formali di potenze a coefficienti in un anello qualsiasi, ed anche a quelle convergenti se su questo esiste una nozione di valore assoluto (ad esempio sui corpi valutati completi). Nel capitolo finale del Cartan tale metodo è utilizzato per dimostrare teoremi di esistenza per sistemi di equazioni differenziali analitici (in una variabile).

Siccome la funzione $z \mapsto z^p$ di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ è una applicazione aperta, si ha che ogni applicazione olomorfa non localmente costante tra superfici di Riemann è localmente aperta e quindi aperta. Ne segue che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa e $|f|$ ha un massimo locale in un punto di Ω allora f è localmente costante. Stessa conclusione se la parte reale di f ha un massimo (o un minimo) locale in Ω. Altra conseguenza: sia $\phi : X \to Y$ una applicazione olomorfa tra superfici di Riemann e sia X compatta; allora ϕ è surgettiva o costante. Infatti se non costante è aperta; è inoltre chiusa perché X è compatta.

Proposizione 15 *Ogni funzione meromorfa f su $\mathbb{P}^1$ è un rapporto tra polinomi*

Dim. La restrizione di f a $\mathbb{C}$ ha un numero finito di poli e zeri; moltiplicando f per un rapporto tra polinomi si ha una funzione G meromorfa su $\mathbb{P}^1$ che ha su $\mathbb{C}$ né zeri né poli; qualunque valore essa assuma nel punto ∞ non potrà essere surgettiva ed è quindi una costate.

Proposizione 16 (Liouville) *Ogni funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e limitata è costante*

Dim. f è olomorfa su $\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ ed ha in ∞ una singolarità eliminabile perché è limitata; quindi essa è prolungabile ad una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{P}^1$ che sarà costante perché essendo $\mathbb{P}^1$ compatto il suo modulo ha un massimo.

Formula di Riemann-Green(Commento)
Un sottoinsieme $\Gamma \subset \mathbb{C}$ è una *curva* di classe C^1 se è localmente il luogo di zeri di una funzione a valori reali di classe C^1 avente differenziale non nullo; precisamente se per ogni $z_0 \in \Gamma$ esistono un suo intorno aperto U ed una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\Gamma \cap U = \{z \in U \ : \ f(z) = 0\}$ e $df(z_0) \neq 0$. Per il teorema delle funzioni implicite allora Γ è localmente il grafico di una funzione $y(x)$ o $x(y)$ (a seconda che sia non nulla la derivata di f rispetto ad y o rispetto ad$x$) di classe C^1. Un *dominio* di classe C^1 in $\mathbb{C}$ è un compatto $D \subset \mathbb{C}$ localmente definito da una disequazione $f \leq 0$ con f di classe C^1: precisamente se D è compatto e per ogni $z_0 \in D$ esistono un suo intorno aperto U ed una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $D \cap U = \{z \in U \ : \ f(z) \leq 0$ e $df(z_0) \neq 0$. In tal caso la frontiera di D è una curva compatta di classe C^1. Un *dominio* C^1 a tratti è un compatto localmente definito su aperti U come sopra da due funzioni $f, g : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $D \cap U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ f(z) \leq 0 \ g(z) \leq 0\}$; per il teorema di inversione locale, in un intorno di z_0 le f, g sono un sistema di coordinate locali (di classe C^1) nelle quali D diviene localmente il quadrante di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dei punti a coordinate non positive.

Lemma 17 *Sia K un compatto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Esiste allora un dominio C^1 a tratti $D \subset \Omega$ contenente K al suo interno*

Dim. Se $d > 0$ è sufficientemente piccolo si prenda per D l'unione dei quadrati $I \times J$ ove I, J sono intervalli chiusi in $\mathbb{R}$ con estremi in $1/d \cdot \mathbb{Z}$ e che intersecano K.

Nota. nel lemma precedente si può richiedere che D sia di classe C^1; ciò si può ottenere o "smussando gli angoli" o utilizzando la nozione di partizione dell'unità per costruire una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile (di classe C^1 o più) "divergente" su Ω (ossia che vada a $+\infty$ su ogni successione in Ω priva di punti aderenti) e mostrando poi che per $M \in \mathbb{R}$ sufficientemente alto l'insieme $\{f \leq M\}$ è un tale dominio. Mediante le partizioni dell'unità si può ridurre la dimostrazione della formula di Riemann-Green al caso di un retangolo, o più precisamente al caso di un quadrante del piano con gli integrandi aventi supporto compatto (cfr. il testo di Cartan).

Commento (Introduzione dell'esponenziale tramite inversione di un integrale) Consideriamo la $1-$forma olomorfa $\omega = dz/z$ su $\mathbb{C}^*$. Detto $\phi : (X, x_0) \to (\mathbb{C}^*, 1)$ il rivestimento universale, siano $\tilde{\omega} = \phi^*(\omega)$ e $f : X \to \mathbb{C}$ la primitiva di $\tilde{\omega}$ con $f(x_0) = 0$. Tale f è un rivestimento e quindi un biolomorfismo. Infatti f è un omeomorfismo locale perché il suo differenziale è in ogni punto non nullo. Se $h : \Omega \to \mathbb{C}$ è una primitiva di ω su un aperto di $\mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$, allora $\bar{h}(z) = h(\lambda z)$ è una primitiva di ω su $\bar{\Omega} = (1/\lambda) \cdot \Omega$; da ciò si deduce nel modo solito che per f vale il sollevamento dei cammini e quindi è effettivamente un rivestimento. Quindi il rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$ può essere identificato con $\mathbb{C}$ e descritto come l'inversione dell'integrale $\int dz/z$.

Ne risulta che $\mathbb{C}^*$ è descrivibile come quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo Γ dei periodi di ω; questo deve essere un sottogruppo discreto e non può essere il gruppo nullo perché $\mathbb{C}^*$ non è omeomorfo a $\mathbb{C}$ (non è semplicemente connesso) e non può avere rango due perché $\mathbb{C}^*$ non è compatto. Quindi Γ ha rango uno. Verifichiamo che Γ è fatta di numeri puramente immaginari. Infatti:

$$\omega = dz/z = (\bar{z} \cdot dz)/(\bar{z} \cdot z) = \alpha + i\beta$$

ove $\alpha = (xdx + ydy)/(x^2 + y^2)$ e $\beta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ sono $1-$forme chiuse reali su $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una primitiva di ω su $\mathbb{R}^+$ (essa esiste perché $\mathbb{R}^+$ è semplicemente connesso), allora $(1/2)F(x^2 + y^2)$ è una primitiva di α che quindi è esatta. Ne segue che i periodi di ω sono i periodi di β moltiplicati per l'unità immaginaria. Risulta così univocamente determinato un generatore T di Γ avente parte reale nulla e parte immaginaria positiva; si introduce quindi la costante reale positiva π ponendo $T = 2\pi i$.

Evidentemente questo modo di introdurre la funzione esponenziale è concettualmente più complicato dell'altro. Inoltre lo schema sin qui descritto introduce una struttura di gruppo su $\mathbb{C}^*$ (come quoziente di $\mathbb{C}$) ma non precisa che questa coincide proprio con quella già esistente (la moltiplicazione tra numeri complessi non nulli). Questo metodo ha comunque alcuni pregi. Anzitutto non utilizza alcun tipo di calcolo; inoltre assicura che su $\mathbb{C}^*$ c'è una struttura di gruppo, quella di quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo dei periodi della forma ω, indipendentemente dal fatto che già una tale struttura (il prodotto tra numeri complessi) fosse presente. Analoghi ragionamenti permettano talvolta di determinare la forma di una superficie di Riemann data come luogo di zeri di un polinomio irriducibile in due variabili a partire dalla conoscenza di forme differenziali su essa: ad esempio che una cubica piana (proiettiva non singolare) è biolomorfa ad un toro complesso di dimensione uno, ossia al quoziente di $\mathbb{C}$ per un sottogruppo discreto di rango due.

Commento (Sottogruppi chiusi in $\mathbb{R}^n$)
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita; per $l \subset V$ ed A un sottoanello di $\mathbb{R}$ indichiamo con $A(L)$ l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di L a coefficienti in A. Diremo che un sottogruppo Γ di V è *discreto* se è discreto per la la topologia indotta da quella di V o equivalentemente se esiste un intorno di 0 in V che interseca Γ solo in 0; in tal caso Γ è anche un sottogruppo chiuso di V.

Lemma 18 *Se un sottogruppo chiuso Γ di V non è discreto, allora contiene un* *sottospazio vettoriale di dimensione positiva di V*

Dim. Per ipotesi esiste una successione (y_n) in $V-\{0\}$ convergente a zero. Possiamo supporre che la sua immagine in $\mathbb{P}(V)$ sia convergente (alternativamenete scelta una norma su V: che $y_n/||y_n||$ converga in V). Esiste quindi un elemento $v \in V-\{0\}$ ed una successione (λ_n) di numeri reali positivi tali che $\lambda_n y_n \to v$; evidentemente si avrà che $\lambda_n \to +\infty$. Se a_n è la parte intera di λ_n si ha allora che $\alpha_n/\lambda_n \to 1$ e la successione in Γ data da $\alpha_n y_n = (\alpha_n/\lambda_n)(\lambda_n y_n$ converge a v; essendo Γ chiuso si ottiene che $v \in \Gamma$. D'altra parte sostituendo per λ positivo λ_n con $\lambda\lambda_n$, le considerazioni precedenti danno che anche λv appartiene a Γ e quindi questo contiene tutto il sottospazio vettoriale generato da v.

Per Γ un sottogruppo chiuso di V siano X il massimo sottospazio vettoriale in esso contenuto, Y un supplementare di X in V e $\bar{\Gamma} = \Gamma \cap Y$; si ha che $\bar{\Gamma}$ è discreto (in Y ed in V) e che $\Gamma = \bar{\Gamma} \oplus X$. Esaminiamo quindi il caso di un sottogruppo discreto in V. Diremo *sistema primitivo* in Γ una $r-$upla $x_1, ..., x_r$ di suoi elementi linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e tali che $\mathbb{Z}(x_1, ..., x_r) = \Gamma \cap \mathbb{R}(x_1, ..., x_r)$.

Lemma 19 *Sia Γ discreto in V e sia $(x_1, ..., x_r)$ un suo sistema primitivo. Se $\Gamma \neq \mathbb{Z}(x_1, ..., x_r)$, esiste un $x_{r+1} \in \Gamma$ per cui $(x_1, ..., x_{r+1})$ è un sistema primitivo*

Dim. Siano $x \in \Gamma - \mathbb{Z}(x_1, ..., x_r)$ ed $L = \mathbb{R}(x_1, ..., x_r)$; sia inoltre $H = \Gamma \cap L$. Consideriamo l'insieme P dei $0 \leq \lambda < 2$ per cui esistono $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r + \lambda x$ in H. Tale P contiene 1 ed è inoltre finito: infatti nella scrittura precedente si possono sottrarre ai λ_i le loro parti intere (si sottrae un elemento di H senza cambiare λ) ottenedo $0 \leq \lambda_i < 1$ che con la condizione $0 \leq \lambda < 2$ danno una parte limitata di L che incontra H in un insieme finito perché quiesto è discreto. Quindi P ha un minimo; cambiando eventulmente il punto x iniziale, possiamo supporre che tale minimo sia 1.
Mostriamo che $(x_1, ..., x_r, x)$ è un sistema primitivo. Essi sono linermente indipendenti su $\mathbb{R}$ perché per costruzione $x \notin \mathbb{R}(x_1, .., x_r)$. Sia ora $y \in H$; appartenendo ad L si ha $y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r + \lambda x$. Se α è la parte intera di λ si ha che $y - \alpha x = \lambda_1 + ... + \lambda_r + (\lambda - \alpha)x$ appartiene ad H, quindi $\lambda - \alpha \in P$ ed essendo in $[0, 1[$ deve essere nullo per come scelto x. Ne segue che $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r \in H$ e quindi che i λ_i sono tutti interi perché $(x_1, ..., x_r)$ è un sistema primitivo; così $y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r + \alpha x$ è una combinazione a coefficienti interi.

Corollario 20 *Sia Γ un sottogruppo chiuso di uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V. Esiste allora una base $x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_r, z_1, ..., z_t$ di V tale che $\Gamma = \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r + \mu_1 y_1 + ... + \lambda_s y_s : \ \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{Z} \ \mu_1, ..., \mu_s \in \mathbb{R}\}$. Si ha $s = 0$ se e solo se Γ è discreto. In tal caso $x_1, ..., x_r$ è un sistema primitivo ed è una base di Γ su $\mathbb{Z}$; inoltre ogni sistema primitivo può essere prolungato ad una tale base*

Nel caso che V sia $\mathbb{C}$ si hanno come soli sottogruppi discreti il sottogruppo (0), quelli generati su $\mathbb{Z}$ da un solo elemento non nullo (sono detti di rango 1 ed il generatore è univocamente determinato a meno del segno) e quelli generati da due elementi linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (sono detti di rango due od anche "reticoli" in $\mathbb{C}$; i suoi sistemi di generatori sono determinati a meno di automorfismi di $\mathbb{Z}^2$, quindi a meno di una matrice intera 2×2 a determinante ± 1.