Corde improprie reali a ipersuperficie complesse

(F.Lazzeri; Pisa, novembre 2001)

Sia X il germe di ipersuperficie complessa nell'origine di $\mathbb{C}^n$, luogo di zeri di un germe $f \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ nullo all'origine che supporremo ridotto, ossia non identicamente nullo e senza fattori primi multipli.
Supponiamo che f abbia ordine almeno due, ossia che X sia un germe singolare. Utilizzando il teorema di preparazione di Weierstrass si dimostra facilmente il fatto seguente:

($\dagger$) sia B una qualsiasi palla aperta di centro l'origine in $\mathbb{C}^n$ sulla quale f sia definita (ossia converga come serie) e sia X_B il luogo degli zeri di f in B. Allora per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^n$ esistono $x, y \in X_B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $v = \lambda(x - y)$

Mostreremo ora con un argomento elementare, che in ($\dagger$) si può richiedere che lo scalare λ sia reale. In altre parole: dati una ipersuperficie analitica X in $\mathbb{C}^n$ ed un suo punto singolare x_0, non solo per ogni intorno U di x_0 in X, le direzioni delle "corde complesse" per punti distinti di U riempiono tutto lo spazio delle direzioni complesse, ma anche "quelle reali" coprono tutte le direzioni possibili. Come corollario, nelle ipotesi fatte all'inizio, ogni (germe di) funzione che sia di classe C^1 in un intorno dell'origine e che sia nulla su X ha il differenziale nullo in 0.

Sia qindi $v \in \mathbb{C}^n$; se $v = 0$ quanto asserito è ovvio. Se $v \neq 0$ lo si completi ad una base ottenendo coordinate $(w, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ su $\mathbb{C}^n$. Se $f(w, 0) \equiv 0$ quanto asserito è ancora ovvio; in caso contrario f sarà $p-$regolare in w per qualche intero $p \geq 2$ e quindi per il teorema di Weierstrass si potrà supporre $f(w, x) = w^p + a_1(x)w^{p-1} + ... + a_p(x)$. Eliminando w tra f e $\partial f/\partial w$ si ottiene un germe analitico $R(x)$ (il risultante) non identicamente nullo in 0 di $\mathbb{C}^{n-1}$ perché f è un germe ridotto. Detto Δ il luogo di zeri di R in $\mathbb{C}^{n-1}$, o meglio in un intorno aperto V dell'origine in $\mathbb{C}^{n-1}$ ove vale la presentazione di Weierstrass, si hanno per x non in Δ p radici distinte di $f(w, x) = 0$. Si vuol mostrare che qualche differenza tra due tali distinte radici deve essere reale. Se per assurdo così non fosse, tali radici sarebbero ordinabili secondo la grandezza delle loro parti immaginarie. Esse fornirebbero quindi p funzioni olomorfe $\phi_1(x), ..., \phi_p(x)$ su $V - \Delta$ che per il teorema di estenzione di Riemann sarebbero poi olomorfe su tutto V (in tal caso quindi f sarebbe il prodotto delle $w - \phi_i(x)$).
Essendo $p \geq 2$ possiamo considerare la funzione olomorfa $\phi_1(x) - \phi_2(x)$ su V. Essa non è costante, perché f è ridotta; quindi è una applicazione aperta di V in $\mathbb{C}$. Annullandosi nell'origine, essa dovrà assumere valori reali non nulli in ogni intorno di tale punto ed in particolare quindi anche in V.