Convessità di punti critici (F.Lazzeri , febbraio 1999)

Teorema 1 *Siano* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile (infinite volte) il cui rapporto con* $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^p$ *abbia limite* 1 *per* $x \to 0$. *Allora:*
a) esiste $\epsilon > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *per* $0 < ||x|| \le \epsilon$
b)fissato ϵ *come in 1) , esiste* $\delta_0 > 0$ *tale che per* $0 < \delta < \delta_0$ *l'aperto* $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < \epsilon, f(x) < \delta\}$ *è convesso*
Se nell'ipotesi si sostituisce $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^p$ *con* $x_1^{2p} + \cdots + x_n^{2p}$ *, la a) rimane vera ma la b) in generale no.*

Dim. a): è evidente in entrambe le ipotesi. Esaminiamo la b). Nell'ipotesi fatta lo sviluppo di Taylor di f all'origine di ordine $2p$ è della forma:

$$f(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^p + \sum_{|I|=2p+1} h_I(x) x^I$$

ove le h_I sono funzioni differenziabili (su $\mathbb{R}^n$). Calcolando la derivata rispetto a t di $f(tx)$ per $t > 0$, si verifica, in entrambe le ipotesi da considerare, che esiste $\eta_0 > 0$ tale che per $||x|| < \eta_0$ essa è positiva per $t \in [0, 1]$.
Ne segue per $0 < \eta < \eta_0$ che l'insieme descritto nell'enunciato è stellato in 0 e quindi connesso.
Per studiarne la convessità si consideri la funzione:

$$F_t(x) = F(x_1, \ldots, x_n; t) = t^{-2p} f(tx)$$

Utilizzando ancora l'espressione data sopra dello sviluppo di Taylor di f si ha che essa è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e che per $t = 0$ si ha:

$$F_0(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^p$$

Quindi la $F_t(x)$ è una deformazione di F_0 la quale è una equazione di definizione per un aperto fortemente convesso di $\mathbb{R}^n$. La convessità deriva allora dalla caratterizzazione di aperti fortemente convessi come descritto in [L].
Per dimostrare l'ultima affermazione si considera la funzione:

$$f(x) = x^{2p} + \ldots + x_n^{2p} + (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^q$$

con $q > p$. La condizione di convessità non è allora verificata lungo gli assi coordinati: basta calcolare la derivata parziale seconda diciamo per x_1 e calcolarla lungo i punti dell'asse x_1 che è tangente alla fibra di f. Un facile calcolo mostra allora che essa è negativa salvo che nell'origine.

[1] **F.Lazzeri** *Esistenza di buoni ricoprimenti*
http:www.dm.unipi.it/gauss-pages/lazzeri