Istituzioni di Geometria Superiore

F.Lazzeri (primo semestre A.A. 2001/02 univ. di Pisa)

Richiami di calcolo differenziale locale

In quel che segue "spazio vettoriale" significherà "spazio vettoriale reale di dimensione finita". In ogni tale spazio verrà utilizzata una norma scelta comunque tra quelle esistenti : tutto quanto verrà discusso non dipenderà dalla particolare norma utilizzata.

Gran parte dei risultati richiamati in questo paragrafo rimangono validi anche per per spazi vettoriali reali di dimensione infinita su cui sia stata fissata una norma rispetto alla quale essi siano completi: tali spazi vengono chiamati spazi di Banach. Essi vengono solitamente studiati nei corsi di Analisi; diversi esempi saranno introdotti più avanti anche in questo corso: un esempio tipico sarà dato dalla norma del sup sullo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori reali definite su uno spazio compatto. Per l'estensione del calcolo locale agli spazi di Banach bisogna richiedere esplicitamente alcuni fatti che sono automaticamente verificati in dimensione finita; precisamente ogni applicazione lineare $\phi : E \to F$ deve essere supposta continua e talvolta, come per i teoremi di inversione locale, si deve supporre che il suo nucleo abbia supplementare chiuso, che la sua immagine sia chiusa e sia dotata anch'essa di supplementare chiuso.

Siano V, W spazi vettoriali, $\Omega \subset V$ un aperto, $x_0 \in V$ e $f : \Omega \to W$ una applicazione. Ricordiamo che f è detta *differenziabile* in x_0 se esiste $L : V \to W$ lineare tale che posto per $h \in V$ con $x_0 + h \in \Omega$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L[h] + R(h)$$

si abbia

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{||h||} = 0$$

Si dimostra che di tali L ne esiste al più uno; se esiste esso viene detto il *differenziale* di f in x_0 ed è indicato con $df(x_0)$ (Si noti l'uso di parentesi tonde e quadre: in $df(x_0)[h]$, x_0 è il punto in cui si "differenzia" ed è indicato entro parentesi tonde; in parentesi quadre indichiamo invece gli "incrementi", in questo caso h, in cui il differenziale è calcolato).

Se f è differenziabile in ogni punto di Ω, si ha una applicazione

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(V, W) = Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$$

Se tale applicazione è continua diremo che f è di classe C^1 su Ω.
Induttivamente, per k intero ≥ 2, diremo che f è di classe C^k se è C^1 e df è C^{k-1}; diremo che f è C^∞ se essa è C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.
D'ora in poi il termine "differenziabile" significherà di classe C^∞.

Teorema 1 (di inversione locale) *Siano E, F spazi vettoriali, Ω un aperto in V, $f : \Omega \to F$ differenziabile ed $x \in \Omega$.*
Se $df(x) : E \to F$ è un isomorfismo, allora esiste un aperto $U \subset E$ contenente x , tale che :
a. $V = f(U)$ è aperto in F
b. $f : U \to V$ è biunivoca con inversa differenziabile.

La dimostrazione sarà supposta nota (corsi di Analisi).

Def. Siano $U \subset E$ e $V \subset F$ aperti in spazi vettoriali. Una applicazione $f : U \to V$ è detta un *diffeomorfismo* se è biunivoca e differenziabile insieme alla sua inversa. Nelle notazioni ed ipotesi del teorema pecedente diremo che f è un *diffeomorfismo locale* in $x \in \Omega$ od anche che essa è *localmente invertibile*

Un diffeomorfismo sarà talvolta chiamato anche *cambiamento di coordinate.*

Corollari del teorema di inversione locale

Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, $f : \Omega \to F$ una applicazione differenziabile e sia $0 \in \Omega$, $f(0) = 0$.

a. supponiamo che $df(0) : E \to F$ sia surgettiva.
Sia $p : E \to K = ker(df(0))$ una proiezione (associata alla scelta di un supplementare di K in E). Allora l'applicazione $g : \Omega \to F \oplus K$ definita da $g(x) = (f(x), p(x))$, è localmente invertibile in 0. Essa rappresenta quindi un cambiamento di coordinate in un intorno di 0; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente la proiezione sul fattore F).

b. supponiamo che $df(x_0) : E \to F$ sia iniettiva.
Sia H un supplementare in F dell'immagine di $df(x_0)$. Allora l'applicazione $g : E \oplus H \to F$ definita da $g(x, h) = f(x) + h$ è localmente invertibile in 0. Essa definisce quindi un cambiamento di coordinate nell'origine di F; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente l'inclusione di E in $E \oplus H$).

Integrali contenenti un parametro

Siano E uno spazio vettoriale e $f : [a, b] \to E$ continua. Esiste un unico $I \in E$ detto *integrale di f su $[a, b]$* (e che verrà indicato con $\int_a^b f(t)dt$) tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista $\delta > 0$ tale che per ogni successione $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ con $\mid x_{i-1}, x_i \mid \leq \delta$ per $i = 1, \ldots n$, sia

$$\mid \sum_1^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - I \mid < \epsilon$$

Se $b < a$ definiamo $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Proposizione 2 *$f \to \int_a^b f(t)dt$ è una applicazione lineare continua di $C^0([a, b])$ in $\mathbb{R}$ la cui norma è $|b - a|$ (ossia $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq |(b - a)| \cdot sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$)*

Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, T uno spazio topologico. Le applicazioni $f : \Omega \times T \to F$ possono essere pensate come famiglie di applicazioni da Ω in F parametrizzate da T. Useremo in tal caso la notazione $f(x, t) = f_t(x)$ per $(x, t) \in \Omega \times T$. La notazione $df_t(x)$ indicherà quindi il differenziale della funzione $f_t : \Omega \to F$ nel punto $x \in \Omega$.

Def. $C^1_T(\Omega, F)$ è l'insieme delle $f : \Omega \times T \to F$ che sono continue, tali che per ogni $t \in T, f_t : \Omega \to F$ sia differenziabile e tali che $df_t : \Omega \times T \to \mathcal{L}(E, F)$ sia continua. Analogamente si definiscono le $C^k_T(\Omega, F)$ per $k \geq 2$ o $k = \infty$.

Teorema 3 *Siano $a < b$ e $f \in C^1_{[a,b]}(\Omega, F)$. Allora la funzione $g : \Omega \to F$ definita da $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ è di classe C^1 ed il suo differenziale è $dg = \int_a^b df(x,t)dt$ (l'integrale al secondo membro è fatto in $\mathcal{L}(E,F)$).*

Corollario 4 *Se nel teorema precedente si suppone $f \in C^k_{[a,b]}(\Omega, F), k \geq 1$ allora $g \in C^k(\Omega, F)$.*

dim. del teorema

Continuità di g : siano $x_0 \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Vogliamo trovare un intorno U di x_0 in Ω tale che per $x \in U$ sia $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Essendo f continua su $\Omega \times [a, b]$,per ogni $t \in [a, b]$ esiste un intorno A_t di (x_0, t) in $\Omega \times [a, b]$ tale che per $(y, s) \in A_t$ sia $|f(y, s) - f(x_0, t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Ora tale intorno può supporsi del tipo $U_t \times I_t$ con U_t, I_t aperti negli spazi Ω e $[a, b]$. Per compattezza di $[a, b]$, esistono $t_1, \cdots, t_r$ tali che $I_1 \cup \cdots \cup I_r = [a, b]$. Allora per $x \in U = U_{t_1} \cap \cdots \cap U_{t_r}$ e qualsiasi $t \in [a, b]$ si ha :

$$|g(x) - g(x_o)| = |\int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t)dt| < (b-a)\cdot \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon.$$

Differenziabilità di g : bisogna mostrare che g è differenziabile nel punto $x_0 \in \Omega$ e che il suo differenziale è $\int_a^b df(x_0,t)dt$. Ciò significa che :

$$\lim_{\substack{x_0+h \in \Omega \\ h \to 0}} \frac{\int_a^b (f(x_0+h,t) - f(x_0,t))dt - (\int_a^b df_t(x_0)dt)[h]}{||h||} = 0$$

Ora si ha :

$$(\int_a^b df_t(x_0)dt)[h] = \int_a^b df_t(x_0)[h]dt$$

(si noti che l'integrale nel membro di sinistra è fatto in $\mathcal{L}(E, F)$ mentre quello a destra è fatto in F)

Quindi si deve mostrare che va a zero l'integrale

$$\int_a^b (\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - df_t(x_0)[h]}{||h||})dt$$

Consideriamo la funzione $\sigma : [0, 1] \to U$ definita da $\sigma(t) = x_0 + th$. Allora (teorema di Torricelli) si ha :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f \circ \sigma(1) - f \circ \sigma(0) = \int_0^1 d(f \circ \sigma) =$$

$$= \int_0^1 df_t(x_0+sh) \cdot \sigma'(s)ds = \int_0^1 df_t(x_0+sh)[h]ds$$

Sostituendo nell'espressione precedente ci si riduce a mostrare che va a zero l'espressione:

$$\frac{1}{||h||} \int_a^b (\int_0^1 (df_t(x_0+sh) - df_t(x_0))ds)dt[h]$$

Essendo $df_t(x)$ continua su $\Omega \times [a,b]$, lo stesso ragionamento utilizzato per mostrare la continuità di g , mostra che la norma di $df_t(x_0+sh) - df_t(x_0)$ è maggiorata da una qualsiasi prefissata costante positiva per h in qualche intorno dell'origine e da ciò segue facilmente che tutto l'integrale va a zero.

Teorema di divisione elementare

Siano E, F spazi vettoriali ; un aperto Ω in $E \times F$ è detto *stellato* rispetto ad E se per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$, tutto il segmento $[(x_0,0),(x_0,y_0)]$ è contenuto in Ω.

Teorema 5 (divisione elementare) *Siano $\Omega \subset E \times F$ un aperto stellato rispetto a E ed $f : \Omega \to G$ una applicazione differenziabile nulla su $\Omega \cap E \times \{0\}$; (ossia tale che $f(x_0, 0) = 0$ per ogni $(x_0, 0) \in \Omega$). Esiste allora una applicazione differenziabile $g : \Omega \to \mathcal{L}(F, G)$ tale che per $(x, y) \in \Omega$ sia $f(x, y) = g(x, y)[y]$*

dim. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ fissato. Consideriamo la funzione $\tilde{f} : [0,1] \to G$ definita da $\tilde{f}(t) = f(x_0, ty_0)$. Per il teorema di Torricelli, si ha:

$$f(x_0,y_0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \int_0^1 d\tilde{f} = \int_0^1 (df_x(x_0,ty_0)[y_0]) =$$

$$= (\int_0^1 df_x(x_0,ty_0))[y_0] = g(x_0,y_0)[y_0]$$

ove df_x dipende differenziabilmente da x_o, y_0, t; i risultati del paragrafo precedente assicurano quindi che g è differenziabile.

Applicazioni polinomiali

Siano E, F spazi vettoriali. Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio omogeneo di grado p* se esiste una $b : E^p \to F$ $p-$lineare tale che per ogni $x \in E$ sia $\phi(x) = b(x, \cdots, x)$. Diremo che ϕ è la *contrazione* di b. Si verifica facilmente (facendo una media su permutazioni delle variabili) che se ϕ è un tale polinomio, fra tutte le $p-$lineari di cui esso è contrazione, ve ne è esattamente una che sia simmetrica : essa verrà detta la *polarizzazione* di ϕ

Ne segue che $\mathcal{L}_p(E, F) =$\{polinomi omogenei di grado p da E a F \} è uno spazio vettoriale (è in corrispondenza biunivoca con le applicazioni $p-$lineari simmetriche da E ad F).

Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio di grado $\leq n$* se $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_p$ ove $\phi_i : E \to F$ è un polinimio omogeneo di grado p.

Se Ω è un aperto in $E \times F$ e $g : \Omega \to \mathcal{L}_p(F, G)$ è differenziabile, allora $(x, y) \to g(x, y)[y]$ (che è ovviamente differenziabile) sarà detta un *polinomio omogeneo di grado p* in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su Ω.

Sviluppi di Taylor

Siano Ω un aperto in $E \times F$ stellato rispetto ad E, $\Omega_0 = \Omega \cap E \times \{0\}$ e sia $f : \Omega \to G$ differenziabile. Allora $f(x, y) - f(x, o) : \Omega \to G$ è nulla su Ω_0 ; quindi per il teorema precedente, esiste $R_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F, G)$ tale che $f(x, y) - f(x, 0) = R_0(x, y)[y]$. Posto $f(x, 0) = \phi_0(x)$ questa relazione si scrive:

(1) $\qquad f(x, y) = \phi_0(x) + R_0(x, y)[y]$

che verrà chiamata *sviluppo di Taylor d'ordine* 0 di f rispetto a y. Sviluppando d'ordine zero R_0, si ottiene una relazione del tipo $R_0(x,y) = \phi_1(x,y) + R_0(x,y)[y]$ ove $\phi_1 : \Omega_0 \to \mathcal{L}_1(F,G), \tilde{R}_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F, \mathcal{L}_1(F,G))$. Quindi $\tilde{R}_0$ associa ad ogni punto (x_0, y_0) di Ω, una applicazione bilineare su F a valori in G la cui contrazione è un polinomio omogeneo di grado due da F a G che indicheremo con $R_1(x,y)$. Sostituendo nella (1) si ottiene ;

$$f(x,y) = \phi_0(x) + \phi_1(x)[y] + (R_1(x,y)[y]$$

che è lo *sviluppo di Taylor d'ordine* 1: dice che f è un polinomio di grado uno in y a coefficienti $\mathcal{C}^\infty$ in x più un *resto* che è un polinomio omogeneo di grado due in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in x, y.

Proseguendo così si ottiene il seguente :

Teorema 6 (Sviluppo di Taylor) *Se Ω e f sono come sopra, esistono applicazioni differenziabili $\phi_p : \Omega_0 \to \mathcal{L}_p(F,G)$ e $R_p : \Omega \to \mathcal{L}_p(F,G)$ per $p \in \mathbb{N}$ tali che per $n \in \mathbb{N}$ sia :*

$$\text{(2)} \qquad f(x,y) = \sum_{h=0}^{n} \phi_h(x)[y] + R_{n+1}(x,y)[y].$$

Nota. Derivando successivamente ambo i membri di (2) e calcolando per $y = 0$ si ottiene che $\phi_p(x) = \frac{1}{p!} d^p f_x(0)$ (attenzione alle notazioni che possono trarre in inganno: si ricordi che $f_x(y)$ è per definizione $f(x,y)$). Ne segue che le ϕ_h in (2) sono univocamente determinate.
Per quanto riguarda i resti $R_{n+1}(x,y)[y]$, essi non sono univocamente determinati dalle richieste fatte (lo sarebbero se si chiedesse una proprietà supplettiva che qui non esplicitiamo perchè non avremo necessità di avvalercene). Ciò accade perché un polinomio omogeneo a coefficienti C^∞ non (formalmente) nullo può rappresentare la funzione identicamente nulla, a differenza di quel che accade per polinomi a coefficienti costanti (ad esempio la funzione nulla su $\mathbb{R}^2$ può essere scritta $h_1(x_1,x_2)x_1 + h_2(x_1,x_2)x_2$ con $h_1(x_1,x_2) = x_2$ e $h_2(x_1,x_2) = -x_1$).

Quel che spesso è sufficiente sapere dei resti R_n è precisato dalla seguente:

Proposizione 7 *Se Ω, f sono come sopra, ogni $(x_0, 0) \in \Omega$ ha un intorno aperto $U = A \times B \subset \Omega$, con A, B aperti in E, F, tale che*

$$\lim_{y \to 0} \frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{||y||^n} = 0 \textit{ uniformemente per } x \in A.$$

dim. Siano infatti U un aperto in Ω ed M un numero reale tali che $||R_{n+1}(x,y)|| \leq M$ per $(x,y) \in U$. Allora, essendo R_{n+1} un polinomio omogeneo di grado $n+1$, si ha che:

$$\frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{||y||^n} = ||y|| R_{n+1}(x,y)[\frac{y}{||y||}]$$

avrà norma $\leq ||y||M$.

Scritture in termini di coordinate

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate su $E = \mathbb{R}^n$, un polinomio omogeneo $\phi : E \to \mathbb{R}$ di grado d si scrive ordinariamente nel seguente modo:

$$\phi(x) = \sum_{|I|=d} a_I \cdot x^I$$

ove per le usuali convenzioni di multiindici: se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, si pone $|I| = i_1 + \cdots + i_n$ e $x^I = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$.

Nello sviluppo di Taylor di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha una somma di tali polinomi omogenei più un ultimo termine R_{n+1}, il "resto", che è ancora espresso da una scrittura dello stesso tipo con la sola differenza che i "coefficienti" a_I invece che costanti sono funzioni differenziabili:

$$R_{n+1} = \sum_{|I|=n+1} a_I(x) \cdot x^I$$

Utilizzo del linguaggio algebrico

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; l'insieme delle funzioni differenziabili $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dotato delle ovvie operazioni di somma e prodotto costituisce un anello commutativo che indicheremo con $\mathcal{E}(\Omega)$. Per $x_0 \in \Omega$ si ha un omomorfismo

$$\mathcal{E}(\Omega) \ni f \stackrel{\sigma}{\mapsto} f(x_0) \in \mathbb{R}$$

il cui nucleo è un ideale massimale che indicheremo con $\mathfrak{m}_{x_0}(\Omega)$.

Si ha quindi una successione esatta :

$$0 \to \mathfrak{m}_{x_0}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \stackrel{\sigma}{\to} \mathbb{R} \to 0$$

la quale *spezza* ossia esiste un omomorfismo $j : \mathbb{R} \to \mathcal{E}(\Omega)$ tale che $\sigma \circ j = id_{\mathbb{R}}$: quello che associa allo scalare λ la funzione che vale λ su tutto Ω.

Per semplicità di notazioni supponiamo $x_0 = 0$. Per il teorema di divisione elementare sappiamo che se Ω è stellato in 0 allora l'ideale $\mathfrak{m}_0(\Omega)$ è generato dalle funzioni $x_1, \dots, x_n$; da ciò si deducono formalmente gli sviluppi di Taylor di ordine finito per ogni elemento in $\mathcal{E}(\Omega)$.

Si esamini per esercizio se ciò rimane valido anche nel caso che Ω non sia stellato in 0.

Il linguaggio dei germi

Consideriamo la totalità delle coppie (U, f) ove $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto contenente l'origine ed $f : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile; due tali coppie $(U, f), (U', f')$ saranno dette equivalenti se esiste un altro aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine e tale che $V \subset U \cap U'$ e $f_{|V} = f'_{|V}$. Le classi di equivalenza saranno dette *germi di funzioni differenziabili* all'origine in $\mathbb{R}^n$ e l'insieme da esse costituito verrà indicato con $\mathcal{E}(n)$. E' chiaro che la somma e il prodotto di funzioni inducono operazioni su $\mathcal{E}(n)$ con le quali esso diviene un anello commutativo. Si ha ancora una successione esatta che spezza:

$$o \to \mathfrak{m}(n) \to \mathcal{E}(n) \stackrel{\sigma}{\to} \mathbb{R} \to 0$$

ove σ associa alla classe di equivalenza di (U, f) il valore di f in 0 e conseguentemente $\mathfrak{m}(n)$ è l'ideale dei germi "nulli" in 0. Ogni sistema di coordinate all'intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$ fornisce un sistema finito di generatori per $\mathfrak{m}(n)$. Si dimostri per esercizio che inversamente ogni sistema di generatori per $\mathfrak{m}(n)$ contiene un sistema di coordinate locali per qualche intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$.

Risultati ottenuti con metodi elementari

Siano $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$ l'insieme dei germi di funzioni differenziabili in 0 di R^n e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(n)$ il suo ideale massimale.

Per $f \in \mathcal{E}$, indicheremo con $J = J(f)$ l'ideale generato in $\mathcal{E}$ dalle $\partial f/\partial x_i$ per $i = 1, \ldots, n$: esso sarà detto *ideale iacobiano* di f.

Nota. Apparentemente l'ideale iacobiano di f dipende dalle coordinate utilizzare per calcolare le derivate; ma è facile dimostrare che con un altro sistema di coordinate, si ottiene lo stesso ideale (anche se ovviamente le nuove derivate saranno in generale diverse: esse forniranno un nuovo sistema di generatori di tale ideale).

Diremo che f è *singolare* se $J \neq \mathcal{E}$ ossia J è propriamente contenuto in $\mathcal{E}$; diremo che f ha una *singolarità isolata* se è singolare ed esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $J \supset \mathfrak{m}^k$. Due germi $f_0, f_1 \in \mathcal{E}$ sono detti *equivalenti* se esiste un (germe di) diffeomorfismo ψ di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se tale che $f_1 = f_0 \circ \psi$. Una f singolare è detta di *determinazione finita* se esiste un intero naturale p tale che ogni g differenziabile che ha lo stesso sviluppo di Taylor d'ordine p di f , è equivalente ad f. In tal caso diremo anche che f è $p-$*determinata.*

Teorema 8 *Siano $f, g \in \mathcal{E}$ con f singolare e $g \in J(f)^2\mathfrak{m}$. Allora f è equivalente a $f + g$.*

Corollario 9 *Ogni singolarità isolata è di determinazione finita. Più precisamente se $f \in \mathcal{E}$ è tale che $J(f) \supset \mathfrak{m}^k$ allora f è $2k-$determinata.*

Dim. (del corollario) Nelle ipotesi fatte sia $\tilde{f} = f + g$ con $g \in \mathfrak{m}^{2k+1}$. Essendo $J(f) \supset \mathfrak{m}^k$ si ha $J(f)^2 \supset \mathfrak{m}^{2k}$ e quindi $g \in \mathfrak{m}^{2k+1} \subset J(f)^2\mathfrak{m}$ e si applica il teorema precedente.

Prima di dimostrare il teorema, facciamo vedere come se ne può dedurre facilmente il lemma di Morse.

Premettiamo il seguente :

Lemma 10 *Sia $f \in \mathcal{E}$ singolare. Allora $det(\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$ se e solo se $J(f) = \mathfrak{m}$.*

(In tal caso f è detta *di Morse* o *non degenere*)

Dim. Sia $det(\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$; allora l'applicazione $(x_1, \ldots, x_n) \to (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se è localmente invertibile. Quindi esistono funzioni differenziabili $F_1, \ldots, F_n$ nulle in 0 e tali che $x_i = F_i(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ per $i = 1, \ldots, n$. Essendo $F_i(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ (sviluppo di Taylor) si ottiene $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ e quindi $\mathfrak{m} \subset J(f)$; l'inclusione $J(f) \subset \mathfrak{m}$ è assicurata dal fatto che f è singolare.

Viceversa se $J(f) = \mathfrak{m}$, allora si ha $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ih} \partial f/\partial x_h$. Derivando rispetto a x_j e calcolando per $x = 0$ si ha $\delta_{ij} = \sum_{h=1}^n G_{ih}(0)\partial^2 f(0)/\partial x_h \partial x_j$ il che mostra l'invertibilità di $\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j$.

Da questo lemma e dal precedente corollario si ottiene il seguente:

Corollario 11 *Se f è di Morse e $g \in \mathfrak{m}^3$, allora f è equivalente a $f + g$. In particolare f è equivalente al proprio sviluppo di Taylor d'ordine due.*

Dim. (del teorema) Sia U un aperto contenente $0 \in \mathbb{R}^n$ su cui f e g sono definite e si consideri la funzione $f(x) + tg(x)$ definita su $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, restringendo tale funzione a $t = t_0$, si ottiene un germe di funzione $f(x) + t_0 g(x)$ in $0 \in \mathbb{R}^n$ che indicheremo con f_{t_0}. Mostreremo che per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, f_{t_0} è equivalente a tutte le f_t con t sufficientemente vicino a t_0 . Ne seguirà che tutte le f_t sono equivalenti tra loro .

Esaminiamo dapprima il caso $t_0 = 0$
Consideriamo un (germe di) campo di vettori all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ del tipo $(X(x,t),1)$ con $X(0,t) = 0$; seguendo le linee integrali di tale campo otteniamo un germe $\psi_t : (\mathbb{R}^n, 0) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definito da : $\psi_t(x) =$ posizione al tempo t partendo per $t = 0$ da $(x, 0)$ e per t piccolo ψ_t è un cambiamento di coordinate locali all'origine di $\mathbb{R}^n$. Cercheremo di costruire $X(x,t)$ in modo che le ψ_t trasformino le $f + tg$ nella f; ciò equivale a richiedere che la funzione $(f + tg) \circ \psi_t$ non dipenda da t, o in altri termini che $\frac{\partial}{\partial t}((f + tg) \circ \psi_t) = 0$ che si scrive:

$$< \bigtriangledown f + t \bigtriangledown g, X > + g = 0$$

Esplicitamente vogliamo delle $X_i(x,t)$ per $i = 1, \ldots, n$ tali che $X_i(0,t) = 0$ e

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + -g(x)$$

Per dimostrare che tali X_i esistono , ricordiamo che per ipotesi $g \in \mathfrak{m}J^2$ cosicchè

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij} + tm_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Tale relazione è invertibile in un intorno dell'origine (perchè $det(\delta_{ij} + tm_{ij}) = 1$ per $x = 0$) . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\frac{\partial f}{\partial x_j} + t\frac{\partial g}{\partial x_j})$$

ove le h_{ij} sono funzioni differenziabili definite vicino all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Siccome per ipotesi $g \in \mathfrak{m}J(f)$ si avrà una eguaglianza del tipo

$$g = \sum_{i=1}^{n} n_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con le $n_i(0) = 0$. Assieme alla relazione precedente si ottiene quindi

$$-g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} -n_i(x)h_{ij}(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

Questa relazione può essere anche scritta :

$$-g = \sum_{j=1}^{n} X_j(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

ove le $X_j = \sum_{i=1}^{n} n(x)h_{ij}(x,t)$ sono nulle per $x = 0$ e quindi sono le componenti di un campo avente le proprietà richieste.

Sia ora $t_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi; basterà esaminare la famiglia $f+(t_0+t)g = (f+t_0 g)+tg = f_{t_0}+tg$ vicino a $t=0$. Se mostriamo che f e f_{t_0} hanno lo stesso ideale jacobiano, saranno riapplicabili le argomentazioni svolte sopra per il caso $t_0=0$ e la dimostrazione sarà conclusa.
Osserviamo che da $g \in J^2(f)\cdot \mathfrak{m}$, ricordando che $J(f) \subset \mathfrak{m}$, si ha $\partial g/\partial x_i \in J(f)\cdot \mathfrak{m}$. Da ciò seguono relazioni

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_1^n mij \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ove le m_{ij} sono nulle per $x=0$ e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_1^n (\delta_{ij}+t_0 m_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

per cui $J(f_{t_0}) \subset J(f)$; la relazione inversa è conseguenza del fatto che la matrice $(\delta_{ij}+t_0 m_{ij})$ ha determinante che vale 1 all'origine ed è quindi invertibile.

Mostriamo ora un altro risultato detto ancora lemma di Morse (o teorema Babilonese o splitting lemma) per la cui dimostrazione utilizzeremo il seguente lemma (che è un teorema di divisione elementare)

Lemma 12 *Sia $k : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ un germe di applicazione differenziabile tale che $x \to k(x,0)$ sia un diffeomorfismo locale. Allora per ogni $\alpha \in \mathcal{E}(n+m)$ esistono $a : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e $b \in \mathcal{E}(m)$ tali che*

$$\alpha(x,y) = < k(x,y), a(x,y) > - b(y)$$

Dim. Sia $\chi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tale che $\chi(k(x,y),y) = x$ (per costruirla si inverta $(x,y) \to (k(x,y),y)$). Quindi si ha $\alpha(x,y) = \alpha(\chi(k(x,y),y),y)$. Sia $\phi(z,y) \in \mathcal{E}(n+m)$ definita da $\phi(z,y) = \alpha(\chi(k(z,y),y),y)$. Si ha

$$\phi(z,y) = \phi(0,y) + < \sigma(z,y), z >$$

con $\sigma(z,y) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Ponendo $z = k(x,y)$ si ha

$$\alpha(x,y) = \phi(k(x,y),y) = \phi(0,y) + < \sigma(k(x,y),y), k(x,y) >$$

Teorema 13 *Sia $f \in \mathcal{E}(m)$ singolare e tale che*

$$rk(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = n$$

Allora, modulo un cambiamento di coordinate

$$(\mathbb{R}^m, 0) \simeq (\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^c, 0) = \{(x,y,z)\}$$

si ha $f(x,y,z) = ||x||^2 - ||y||^2 + g(z)$ ove $a+b=n$ e $g \in \mathfrak{m}^3(c)$.

Dim. Sia f definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \{(x,\lambda,t)\}$ e sia dato un campo di vettori $\dot{x} = a(x,\lambda,t)$, $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{t} = 1$. Integrando si ottiene un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^{n+p+1}$ in se : quello che ad (x,λ,t) associa il punto $(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t)$ in cui arriva $(x,\lambda,0)$ dopo un tempo t. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t) = < \nabla_x f, a > + \frac{\partial f}{\partial t} = b(\sigma(x,\lambda,t),\lambda t)$$

ove tutto è calcolato in $\sigma(x,\lambda,t)$. Supponiamo che $a(x,\lambda,t)$ sia tale che $b(x,\lambda,t)$ non dipenda da x e si costruisca $B(\lambda,t)$ di modo che sia $B(\lambda,0)=0$ e $\dfrac{\partial B}{\partial t}(\lambda,t)=b_0(\lambda,t)$. Allora $f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t)-B(\lambda,t)$ non dipende da t , quindi coincide con $f(x,\lambda,0)$. Si ha così

$$f(x,\lambda,0)+B(\lambda t)=f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t)$$

e quindi f è equivalente a $f(x,\lambda,0)+B(\lambda,t)$.

Sia ora data f come nelle ipotesi del teorema ; si scelgano coordinate $x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p,t$ in $\mathbb{R}^m$ con n massimale di modo che la matrice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ sia non singolare. Allora il lemma precedente assicura l'esistenza di una funzione a come sopra di modo che $f(x,\lambda,t)$ è equivalente a $f(x,\lambda,0)+B(\lambda,t)$ per qualche funzione B. Questa costruzione si può applicare nuovamente alla funzione $f(x,\lambda,0)$ (chiamando t una delle λ_i) e così procedendo si arriva a dimostrare che f è equivalente a $f(x,0,0)+$ una funzione delle altre variabili. E' chiaro allora come la dimostrazione possa essere conclusa utilizzando il lemma di Morse ordinario.

Deformazioni versali

I risultati esposti nel precedente paragrafo possono essere considerati teoremi di rappresentazione locale (cioè come è fatta la funzione in qualche intorno del punto in esame) a partire da informazioni puntuali (ossia la conoscenza del valore di alcune sue derivate nel punto). Essi mostrano infatti casi in cui avendo certe informazioni sullo sviluppo di Taylor in un punto, si riesce a conoscere il comportamento qualitativo della funzione.

Esamineremo adesso un'altra problematica : data $f\in\mathcal{E}(n)$, come sono fatte le $\tilde{f}$ "vicine" a f ? Prima di dare precise definizioni di cosa intendiamo con tale frase, illustreremo con un esempio semplice quale è l'idea di base.
Consideriamo il germe in 0 della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^4$. Essa è evidentemente convessa con un solo minimo all'origine; se ce ne fosse richiesto un disegno del grafico, in prima approssimazione lo disegneremmo come quello della parabola. Consideriamo ora la famiglia di funzioni $f_t(x)=x^4+tx^2$ ove t è considerato come un parametro; la precedente f è ottenibile ponendo $t=0$. Come è fatta f_t per t non nullo? E' facile verificare che per $t>0$, essa ha ancora un grafico convesso con un solo minimo come prima ma che per $t<0$ si ottiene una funzione con tre punti critici: un massimo locale all'origine preceduto e seguito da minimi locali.
Complichiamo un altro po' le cose: consideriamo la famiglia di funzioni $f_{t,s}(x)=x^4+tx^2+sx$ ove t,s sono considerati come parametri. Per $t=s=0$ si ottiene la funzione f considerata inizialmente. Che comportamente ha la $f_{t,s}$ per t,s non entrambi nulli? Cercando per quali valori di t,s la funzione ha un punto "critico degenere" ossia nel quale si annullano la prima e la seconda derivata, si deve "eliminare" la variabile x tra le equazioni:

$$f'_{t,s}(x)=4x^3+2tx+s=0$$

$$f''_{t,s}(x)=12x^2+2t=0$$

La prima relazione risolta in s ed elevata al quadrato contiene solo potenze pari di x e queste possono essere eliminate risolvendo la seconda relazione in x^2. Si ottiene (se non vado errato) l'equazione :

$$27s^2 + 8t^3 = 0$$

che rappresenta una curva (cuspide) Δ che divide il piano di t, s in due zone: una "interna" A (quella che contiene la parte negativa dell'asse delle x) e l'altra "esterna" B. Per valori dei parametri in A la funzione ha tre punti critici non degeneri (due minimi ed un massimo locali) mentre per valori dei parametri in B si hanno funzioni con un solo punto critico non degenere. La curva stessa è unione di un ramo superiore Δ_+ ove si ha $s > 0$ ed uno inferiore Δ_- ove $s < 0$. Per valori del parametro in Δ_+ la funzione ha due punti critici $x_1 < x_2$ che sono rispettivamente un flesso discendente ed un minimo locale mentre per valori dei parametri in Δ_- la funzione ha due punti critici $x_1 < x_2$ che sono rispettivamente un minimo locale ed un flesso ascendente. Infine per valori dei parametri entrambi nulli si ha la funzione di partenza di cui studiamo le perturbazioni e che ha un solo punto critico (minimo degenere).
La curva Δ con la decomposizione in rami superiore ed inferiore e punto origine viene detta "discriminante" o "diagramma di biforcazione" della famiglia di funzioni esaminata. Si noti che così come il comportamento qualitativo (ossia numero delle soluzioni) dell'equazione di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$ è determinato dalla conoscenza della nullità o segno del discriminante $b^2 - 4c$, in modo analogo il "comportamento qualitativo" della funzione $f_{t,s}(x)$ è dato dal segno del "discriminante" $27s^2 + 8t^3$ o se questo è nullo dal segno del parametro s che in questo caso funge da "secondo discriminante".

Può essere utile osservare come considerazioni analoghe siano state fatte in studi pre-universitari analizzando come sono messe le soluzioni di $x^2+bx+c = 0$ rispetto all'origine (ossia quante ve ne siano negative nulle o positive) oppure rispetto a "limiti" $k_1 < k_2 < ... < k_p$ pre-assegnati in $\mathbb{R}$.

Le questioni sui germi di funzioni che ora esamineremo saranno nel caso ad esempio della funzione x^4 più o meno del tipo seguente: la famiglia di funzioni $x^4 + tx^2 + sx$ descrive tutto quel che può succedere perturbando la $f(x) = x^4$? La risposta che troveremo in questo particolare caso dopo aver dato definizioni precise e dimostrato alcuni teoremi sarà "quasi si" nel senso che occorre un altro parametro che però non influisce sui discriminanti; precisamente troveremo che una famiglia "completa" di deformazioni di x^4 (diremo una famiglia "versale") è la:

$$f_{s,t,r}(x) = x^4 + tx^2 + sx + r$$

Passiamo adesso a dare delle definizioni precise.
Una *deformazione* a p -parametri di un germe $f_0 \in \mathcal{E}(n)$ è una $f \in \mathcal{E}(n+p)$ che estende la f_0 : ossia $f(x,u)$ è tale che $f(x,0) = f_0(x)$, ove (x,u) sono le variabili in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Se $f(x,u)$ è una deformazione a p - parametri di f_0 e $u = \phi(v)$ è un germe di applicazione differenziabile di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in $(\mathbb{R}^p, 0)$, indicheremo con $\phi^*(f)$ la deformazione a q -parametri definita da $\phi^*(f)(x,v) = f(x,\phi(v))$. Essa verrà detta *deformazione indotta* da f per il *cambiamento di parametri* ϕ.
Diremo *isomorfe* due deformazioni di f_0 nello stesso numero di parametri p , che siano ottenibili l'una dall'altra per composizione con un diffeomorfismo di $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ in se del tipo $(x,u) \to (\phi(x,u), u)$ con $\phi(x,0) = x$.

Una deformazione sarà detta *banale* se è isomorfa alla *deformazione costante* $f(x,u) = f_0(x)$. Una deformazione f di f_0 è detta *versale* se ogni altra deformazione di f_0 è isomorfa ad una indotta da f per qualche cambiamento di parametri.

Cercheremo ora di determinare quando una deformazione di f_0 è versale. Sia $f(x,u)$ una deformazione a p -parametri di f_0. Le funzioni $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)$ sono dette *velocità iniziali* della deformazione nelle direzioni $u_1, \ldots, u_p$. Diremo che f è *formalmente versale* se $A(f_0) = \mathcal{E}(n)/J(f_0)$ è generato , come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dalle velocità iniziali di f_0.

Teorema 14 *Una deformazione versale è formalmente versale.*

Dim. Sia $f(x, u_1, \ldots, u_p)$ versale per f_0. Data una qualsiasi $g \in \mathcal{E}(n)$, $f_0(x) + tg(x)$ è una deformazione ad un parametro di f_0. Quindi essa deve essere isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametro. Osia devono esistere $u_1(t), \ldots, u_p(t) \in \mathcal{E}(1)$, con $u_i(0) = 0$, tali che $f(x, u_1(t), \ldots, u_p(t))$ sia isomorfa a $f_0(x) + tg(x)$; quindi deve esistere $\sigma(x,t) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, o)$ con $\sigma(x,0) = x$ e tale che $f(\sigma(x,t), u_1(t), \ldots, u_p(t)) = f_0(x) + tg(x)$. Derivando rispetto a t e calcolando per $t = 0$ si ottiene :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0) \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(x,0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x,0) \dot{u}_i(0) = g(x)$$

quindi g è somma di un elemento di $J(f_0)$ con una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle velocità iniziali (si noti che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0) = \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x)$).

Il seguente teorema (reciproco del precedente) non è dimostrabile col solo ricorso al teorema di divisione elementare; nel seguito mostreremo come con tecniche analoghe a quelle utilizzate sino ad ora la dimostrazione possa essere ridotta alla esistenza di campi di vettori le cui componenti soddisfano certi sistemi di equazioni. La risolubilità di tali sistemi sarà ricondotta tramite tecniche di algebra commutativa (lemma di Nakayama , teorema di preparazione) ad un risultato che viene detto "teorema di divisione differenziabile" il quale non verrà dimostrato che nel corso del prossimo semestre dopo aver introdotto le funzioni di variabile complessa. Sino ad allora quindi la dimostrazione del seguente teorema, così come le applicazioni allo studio dei germi pari e simmetrici che se ne farà, sarà incompleta.

Teorema 15 *Una deformazione formalmente versale è versale.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{E}(n+p)$ una deformazione formalmente versale di $f_0(x) \in \mathcal{E}(n)$. Quindi $f(x,0) = f_0(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x,0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial u_p}(x,0)$ generano $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ su $\mathbb{R}$. Sia $g(x,v) \in \mathcal{E}(n+q)$ una deformazione qualsiasi di $f_0(x)$. Consideriamo la *deformazione somma* di f e g : $F(x,u,v) \in \mathcal{E}(n+p+q)$ definita da $F(x,u,v) = f(x,u) + g(x,v) - f_0(x)$. Tale F "contiene" sia f che g (come restrizioni a $v = 0$ e $u = 0$ rispettivamente). Quindi per mostrare che g è isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametri, sarà sufficiente mostrare che F è isomorfa ad una indotta da f per cambiamento di parametri. Il teorema precedente sarà così dimostrato dal seguente lemma applicato q volte.

Lemma 16 *Sia* $F(x,u_1,\ldots,u_m,t)\in\mathcal{E}(n+m+1)$ *una deformazione a* $m+1$ *parametri di* $f_0(x)\in\mathcal{E}(n)$ *, tale che* $\partial F/\partial u_1(x,0,0),\ldots,\partial F/\partial u_m(x,0,0)$ *generino* $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ *su* $\mathbb{R}$*. Detta* $F_0(x,u)$ *la deformazione a* m *parametri indotta da* F *per* $t=0$ *(ossia* $F_0(x,u)=F(x,u,0)$*), esiste un germe differenziabile (una retrazione)* $h:(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^m,0)$ *con* $h(u,0)=u$ *e tale che* F *è isomorfa alla deformazione indotta da* F_0 *tramite* h*.*

Dim. Cerchiamo germi $a(u,t)$ e $b(x,u,t)$ tali che detta $\phi(x,u,t),h(u,t),t)$ la posizione ove cui arriva il punto $(x,u,0)$ dopo aver seguito per un tempo t il campo $\dot{t}=1$, $\dot{u}=a(u,t)$ $\dot{x}=b(x,u,t)$, si abbia

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}F(\phi(x,u,t),h(u,t),t)\equiv 0$$

cosicchè

$$F(\phi(x,u,t),h(u,t),t)=F(x,u,0)$$

Quindi cambiando parametri in $F(x,u,t)$ con la $(u,t)\to(h(u,t),t)$ si ottiene una deformazione isomorfa a $F(x,u,0)$.

La condizione (1) equivale alla :

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,t)b_i(x,u,t)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial u_j}(x,u,t)a_j(u,t)+\frac{\partial F}{\partial t}(x,u,t)=0$$

Dobbiamo quindi dimostrare che la (2) , considerata come equazione nelle a_j,b_i, è risolubile. Quel che sappiamo è che "riducendo" modulo le u,t tale equazione diviene risolubile; ossia ponendo eguali a zero nella (2) le u,t , si ottiene una equazione in incognite b_i funzioni (germi) nelle x e a_j costanti la cui risolubilità è precisamente l'ipotesi del teorema. La dimostrazione sarà quindi completa se dimostriamo il teorema che segue: siano (x,u) le variabili in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$; per ogni $f\in\mathcal{E}(n+p)$ indichiamo con $\bar{f}\in\mathcal{E}(n)$ il germe di funzione definito da $\bar{f}(x)=f(x,0)$. Evidentemente $f\to\bar{f}$ è un omomorfismo surgettivo. Se $I\subset\mathcal{E}(n+p)$ è un ideale, indichiamo con $\bar{I}$ la sua immagine in $\mathcal{E}(n)$ (si verifica subito che $\bar{I}$ è un ideale in $\mathcal{E}(n)$ perchè l'omomorfismo $\mathcal{E}(n+p)\to\mathcal{E}(n)$ è surgettivo).

Teorema 17 *Siano* $g_1,\ldots,g_r\in\mathcal{E}(n+p)$ *e sia* I *un ideale in* $\mathcal{E}(n+p)$*. Sono fatti equivalenti :*

a) $\bar{I}+\mathbb{R}\bar{g}_1+\cdots+\mathbb{R}\bar{g}_r=\mathcal{E}(n)$

b) $I+\mathcal{E}(p)g_1+\cdots+\mathcal{E}(p)g_r=\mathcal{E}(n+p)$

La dimostrazione di questo teorema sarà ricondotta nel prossimo paragrafo ad un risultato (detto teorema di divisione) che sarà dimostrato dopo aver introdotto le funzioni di variabile complessa.

Si noti che la caratterizzazione trovata delle deformazioni versali può essere riassunta nella seguente "ricetta" per costruirle:
sia $f_0\in\mathcal{E}(n)$ un germe singolare; affinchè esso possieda una deformazione versale, l'anello $A(f_0)$ deve essere uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Se così è , si scelgano $g_1,\cdots,g_p\in\mathcal{E}(n)$ le cui classi in $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ siano un sistema di generatori su $\mathbb{R}$. Allora $f(x,u_1,\ldots,u_p)=f_0(x)+u_1g_1(x)+\ldots+u_pg_p(x))$ è una deformazione versale di f_0. Si deduce anche che la dimensione di $A(f_0)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è la dimensione minimale d'una deformazione versale e che ogni due deformazioni versali della stessa f_0 aventi lo stesso numero di parametri, sono isomorfe.

Il teorema di preparazione

Diremo che $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ è $p-$regolare in t per $p \in \mathbb{N}$ se

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \cdots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0,0) \quad e \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0,0) \neq 0$$

ossia se la restrizione di f all'asse t si annulla d'ordine esattamente p.

Teorema 18 *Siano $f(x,t), g(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ germi con f che è $p-$regolare in t. Allora esistono $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ e $h_j(x) \in \mathcal{E}(n)$, $j = 1, \ldots, p$ tali che:*

$$g(x,t) = Q(x,t) \cdot f(x,t) + h_1(x)t^{p-1} + \cdots + h_p(x)$$

Ossia si può "dividere" g per f ottenendo per resto un polinomio in t di grado $p-1$ a coefficienti in $\mathcal{E}(n)$.
O ancora in altri termini : $\mathcal{E}(n+1)/$ideale generato da f è generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ da $1, t, \ldots, t^{p-1}$

Nota. Questo risultato viene detto teorema di divisione differenziabile (di Weierstrass , Malgrange) e come già detto sarà l'unico di questo capitolo che non verrà dimostrato. Una dimostrazione dell'analogo nel caso analitico sarà fatta più avanti nel capitolo sulle funzioni di più variabili complesse; in tale occasione verranno anche indicate le modifiche necessarie per rendere valida tale dimostrazione anche nel caso C^∞.

Corollario 19 *Sia $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ un germe $p-$regolare in t.*
Esistono germi $u_1(x), \ldots, u_p(x) \in \mathcal{E}(n)$ e $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ tali che $u_i(0) = 0$ per $i = 1, \ldots, p$, $Q(0,0) \neq 0$ e per cui :

$$f(x,t) = Q(x,t)(t^p + u_1(x)t^{p-1} + \cdots + u_p(x))$$

Dim. E' ottenuta (a meno di segni) dividendo come nel precedente teorema la funzione $g(x,t) = t^p$ per f.

Descriviamo ora una formulazione più algebrica del teorema di preparazione, che viene detta *teorema di preparazione nella forma di J.Mather*

Sia k un corpo. Una *k-algebra locale* è il dato di un anello commutativo con identità A che contiene k, avente un unico ideale massimale $\mathfrak{m}_A$ e tale che l'omomorfismo $A \to A/\mathfrak{m}_A$ induca un isomorfismo tra k e $A/\mathfrak{m}_A$, cosicchè l'inclusione di k in A fornisce una spezzamento della successione esatta:

$$0 \to \mathfrak{m}_A \to A \to A/\mathfrak{m}_A = k \to 0$$

Ad esempio gli anelli $\mathcal{E}(n)$ sono $\mathbb{R}-$algebre locali così come i loro quozienti; al contrario se $K \supset k$ è una estensione propria (ad esempio $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$) allora K è un anello locale, perché ha un unico ideale massimale (lo (0)) ed è una $k-$algebra ma non è una $k-$algebra locale.

Un *omomorfismo* di $k-$algebre locali A , B è un omomorfismo $\phi : A \to B$ che sia l'identità su K e tale che sia "locale" nel senso che applichi l'ideale massimale di A entro l'ideale massimale di B (ossia $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$)

Oss. Si noti che k è una $k-$algebra locale e che ogni automorfismo di k come corpo che non sia l'identità non è un omomorfismo di $k-$algebre anche se è un morfismo di anelli locali. Ciò mostra che la richiesta che ϕ sia l'identità su k non può essere eliminata. Essa è però sufficiente: siano infatti A e B due $k-$algebre locali e sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli che induce l'identità su k. Allora $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$; in altri termini ogni morfismo di $k-$algebre è automaticamente un morfismo di $k-$algebre locali. Infatti se $a \in \mathfrak{m}_A$ sia $\lambda \in k$ tale che $\phi(a) - \lambda \in \mathfrak{m}_B$. Se fosse $\lambda \neq 0$, allora $a - \lambda$ sarebbe invertibile in A e quindi $\phi(a - \lambda) = \phi(a) - \lambda$ lo sarebbe in B il che è assurdo perché esso stà nell'ideale massimale. Quindi $\lambda = 0$ ossia $\phi(a) \in \mathfrak{m}_B$.

Sia A un anello (commutativo con identità come tutti gli anelli di cui tratteremo). Un *modulo* su A è il dato di un insieme X dotato d'una struttura di gruppo abeliano e di una moltiplicazione $A \times X \to X$ indicata con $(a, x) \to a \cdot x$ che sia distributiva a sinistra e a destra rispetto alle somme su A e X, sia associativa, ed *unitaria* nel senso che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$.

Dato un insieme S, l'insieme A^S delle applicazioni $\phi : S \to A$ ha una struttura ovvia di A modulo. Il sottomodulo $A(S)$ delle $\phi : S \to A$ che sono nulle tranne un numero finito di $s \in S$, è detto $A-$*modulo libero* generato da S (o su S; vedremo nel seguito una definizione più concettuale di $A-$modulo libero generato da un insieme).
Per $r \in \mathbb{N}$ indicheremo con A^r l'$A-$modulo libero su $S = \{1, \ldots, r\}$.

Un $A-$modulo è detto *finito* se è finitamente generato, ossia se è isomorfo ad un quoziente di A^r per qualche $r \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che A sia una $k-$algebra locale e che X sia un $A-$modulo. Diremo che X è *formalmente finito* su A se $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su k. Qui la notazione $\mathfrak{m}_A \cdot X$ indica il sotto $A-$modulo di X generato dai prodotti di un elemento di $\mathfrak{m}_A$ per un elemento di X; si noti che il quoziente $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è un $A-$modulo e che ogni elemento di $\mathfrak{m}_A$ annulla tutto tale modulo, cosicché esso può essere considerato come un modulo su $k = A/\mathfrak{m}_A$.

E' facile verificare che se un $A-$modulo è finito esso è anche formalmente finito. Anzi, se $x_1, \ldots, x_n$ sono generatori di X su A, allora le loro immagini in $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ sono generatori di tale spazio vettoriale su k. Infatti se $x \in X$, si ha $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$; posto $a_i = \lambda_i + m_i$ con $\lambda_i \in k$ e $m_i \in \mathfrak{m}_A$ per $i = 1, \ldots, n$, si avrà

$$x = \lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n + m_1x_1 + \ldots + m_nx_n$$

Il viceversa in generale è falso; ossia in generale vi sono $A-$moduli formalmente finiti che non sono finiti.

Ad esempio, se $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, $n \geq 1$, l'ideale $\mathfrak{m}_\infty = \cap_{h \geq 1} \mathfrak{m}^h$ è formalmente finito ma non finito.

Altro esempio: $A = k\{x\}$ e $X = k[[x]]$ gli anelli rispettivamente delle serie convergenti e di quelle formali su di un corpo valutato completo (come $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

La verifica di quanto asserito per questi esempi si avvale del seguente risultato:

Lemma 20 (di Nakayama) *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se X è un $A-$modulo finito tale che $\mathfrak{m} \cdot X = X$, allora X è costituito dal solo 0.*

Dim. Siano $x_1, \ldots, x_r$ generatori di X. Allora ogni $x_i \in \mathfrak{m} \cdot X$ e quindi $x_i = \sum_{i=1}^{r} h_{ij}x_j$ con $h_{ij} \in \mathfrak{m}$.

Tale relazione può essere scritta $(I-H)\cdot\bar{x}=0$ ove I e H sono le matrici δ_{ij} e h_{ij} ed $\bar{x}$ è il vettore colonna di componenti $x_1,\ldots,x_r$.
Se dimostriamo che la matrice $I-H$ è invertibile ne seguirà che $\bar{x}=0$ e quindi $X=(0)$. Ed infatti $det(I-H)=1+h$ con $h\in\mathfrak{m}$ e quindi $1+h\notin\mathfrak{m}$ è invertibile in A (perché è un anello locale) cosicché $I-H$ è invertibile.

La seguente conseguenza è spesso utile:

Teorema 21 *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale e X un $A-$modulo finito. Affinché $x_1,\ldots,x_r\in X$ siano generatori di X su A è necessario e sufficiente che essi inducano generatori di $X/(\mathfrak{m}\cdot X)$ in quanto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$*

Dim. Sia $\tilde{X}$ il quoziente di X per il sotto-A-modulo generato dagli $x_1,\ldots,x_r$. Se essi inducono generatori di $X/(\mathfrak{m}\cdot X)$ su $\mathbb{R}$, allora $\mathfrak{m}\cdot\tilde{X}=\tilde{X}$. Essendo questo finitamente generato il lemma precedente assicura che esso è nullo.

Nel primo degli esempi precedenti si ha $\mathfrak{m}_\infty=\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}_\infty$; quindi se $\mathfrak{m}_\infty$ fosse finitamente generato su $\mathcal{E}(n)$, esso sarebbe nullo. Basterà quindi mostrare che esiste un germe di funzione C^∞ non nullo ma con sviluppo di Taylor identicamente nullo.

Per il secondo si ha che se $\mathfrak{m}$ indica l'ideale massimale di $\mathbb{R}\{x\}$ allora $\mathfrak{m}\cdot\mathbb{R}[[x]]$ è l'ideale massimale di $\mathbb{R}[[x]]$ (entrambi tali ideali massimali sono infatti generati da $x_1,\ldots,x_n$). Se $\mathbb{R}[[x]]$ fosse finito su $\mathbb{R}\{x\}$ per il teorema precedente esso sarebbe generato da 1, ossia coinciderebbe con $\mathbb{R}\{x\}$.
Quindi basterà esibire una serie formale che non sia convergente in nessun intorno dell'origine.
Nota. Dal lemma di Nakayama si deduce facilmente che la condizione di esistenza di una deformazione versale per f, ossia il fatto che $\mathcal{E}(f)/J(f)$ abbia dimensione finita come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ equivale al fatto che f abbia in 0 una singolarità isolata, ossia che l'ideale jacobiano $J(f)$ contenga qualche potenza dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, che è la condizione per un germe $f\in\mathcal{E}(n)$ di essere di determinazione finita.

Il teorema di preparazione nella forma di J.Mather, assicura che in certi casi, un modulo formalmente finito è finito.

Premettiamo ancora qualche definizione:
Sia $\phi: A\to B$ un omomorfismo di anelli (supporremo sempre che gli omomorfismi siano *unitari*, ossia $\phi(1_A)=1_B$). Se X è un $B-$modulo, esso può essere considerato anche come $A-$modulo tramite ϕ: definiamo il prodotto tra un $x\in A$ ed un $x\in X$ con la formula $a\cdot x=\phi(a)\cdot x$.
Def. Un omomorfismo $\phi: A\to B$ di $\mathbb{R}-$algebre è detto *preparabile* se ogni modulo finito su B che sia formalmente finito su A è anche finito su A.

Teorema 22 *Ogni omomorfismo $\phi:\mathcal{E}(n)\to\mathcal{E}(m)$ ottenuto da un germe differenziabile $f:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ definendo $\phi(g)=g\circ f$, è preparabile.*

Osservazioni.
1. Se $\phi: A\to B$ è surgettiva, essa è preparabile; anzi i generatori di X su B costituiscono anche un sistema di generatori per X su A.
2. Se $\phi: A\to B$ e $\psi: B\to C$ sono preparabili, anche $\psi\circ\phi: A\to C$ lo è. Infatti in tal caso se X è un $C-$modulo, si ha $\mathfrak{m}_A\cdot X\subset\mathfrak{m}_B\cdot X$ perché $\phi(\mathfrak{m}_A)\subset\mathfrak{m}_B$, e quindi $\dim_{\mathbb{R}}X/(\mathfrak{m}_A\cdot X)\geq dim_{\mathbb{R}}X/(\mathfrak{m}_B\cdot X)$.

Quindi se X è finito su C e formalmente finito su A, è anche formalmente finito su B, quindi essendo ψ preparabile è finito su B. Essendo poi ϕ preparabile, esso sarà finito su A.

Le osservazioni precedenti permettono di limitare la dimostrazione del precedente teorema al solo caso che f sia la proiezione $p : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (ossia $p(x,t) = x$). Infatti ogni (germe in 0 di) applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, è composizione della $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ definita da $g(x) = (x, f(x))$ con la proiezione h di $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ sul secondo fattore. Coseguentemente l'omomorfismo $f^* : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ indotto da f sarà composizione di h^* con g^*. Se mostriamo che p^* è preparabile, allora anche h^* lo sarà (perché composizione di n fattori del tipo di p^*). Per quanto riguarda g^* essa è certamente preparabile perché surgettiva; infatti con un opportuno cambiamento di coordinate nel codominio, g diviene l'inclusione $\mathbb{R}^n \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$.

Esaminiamo quindi la seguente situazione: X un modulo sull'anello dei germi in $(x,t) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ finitamente generato diciamo da $x_1, \ldots, x_r \in X$ e tale che quozientandolo per l'$\mathcal{E}(n)-$modulo $\mathfrak{m}(n) \cdot X$ generato dai prodotti di germi in x nulli all'origine per elementi di X, si ottenga uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita; allargando eventualmente il sistema di generatori di X su $\mathcal{E}(n+1)$, possiamo supporre che un suo sistema di generatori di tale spazio vettoriale sia fornito dalle immagini in esso di $x_1, \ldots, x_r$.

Quindi ogni $x \in X$ si può scrivere

$$x = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{j=1}^{r} z_j x_j$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e le z_j somme di prodotti di germi in x nulli in 0 per germi in x, t. In particolare per $i = 1, \ldots, r$ si ha

$$t x_i = \sum_{j=1}^{r} (c_{ij} + z_{ij}) x_j$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{r} (t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_j = 0$$

Indichiamo con $\Delta(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ il determinante della matrice (b_{ij}) e sia B_{ij} una matrice (a coefficienti in $\mathcal{E}(n+1)$) il cui prodotto con la matrice (b_{ij}) sia la matrice identità moltiplicata per $\Delta(x,t)$. Si ha allora $\Delta \cdot \bar{x} = 0$, essendo $\bar{x}$ il vettore verticale di componenti $x_1, \ldots, x_r$. Quindi Δ annulla tutti gli x_i ed essendo questi generatori di X esso annulla tutto X. Ne segue che X è un modulo (finitamente generato) sull'anello quoziente di $\mathcal{E}(n+1)$ per l'ideale generato da Δ. Mostreremo ora che tale quoziente è finitamente generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ ossia sull'anello dei germi in $x \in \mathbb{R}^n$; ne seguirà che anche X è finito su $\mathcal{E}(n)$ e la dimostrazione sarà conclusa.

Osserviamo per prima cosa che $\Delta(x,t)$ è $q-$regolare rispetto a t per qualche q tra 1 e r: infatti $\Delta(0,t)$ è essenzialmente il polinomio caratteristico della matrice (c_{ij}) che è un polinomio monico di grado r.

Il teorema di divisione assicura allora che $\mathcal{E}(n+1)/(\Delta)$ è un modulo su $\mathcal{E}(n)$ generato da $1, t, \ldots, t^{q-1}$: infatti per ogni $g(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ si ha una relazione

$$g(x,t) = Q(x,t)\Delta(x,t) + \alpha_1(x) t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x)$$

e quindi
$$g(x,t) \equiv \alpha_1(x)t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x) \qquad (mod(\Delta))$$

Germi pari

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *pari* se verifica la condizione $f(x) = f(-x)$: sarà detto invece *dispari* se si ha $f(-x) = -f(x)$.

E' facile convincersi che se $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ è un polinomio, allora esso è pari se e solo se "è" un polinomio nelle $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.
Vediamo che ciò è vero anche per funzioni differenziabili, nel senso precisato dal seguente:

Teorema 23 *Sia $f \in \mathcal{E}(n)$ un germe pari. Esiste allora qualche (germe di) funzione F differenziabile nelle $m = n(n+1)/2$ variabili Y_{ij} per $1 \leq i \leq j \leq n$ tale che f è ottenuta da F sostituendo le $x_i x_j$ alle Y_{ij}.*

Dim. Consideriamo l'applicazione $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ le cui componenti sono i monomi $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$ e sia $\phi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo ad essa associato. E' chiaro che l'ideale $\phi(\mathfrak{m}(m)) \subset \mathcal{E}(n)$ coincide con il quadrato $\mathfrak{m}^2(n)$ dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$. Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è un $\mathcal{E}(m)$ modulo quasi finito ed è quindi finito per il teorema di preparazione. Anzi possiamo anche dedurne che esso è generato come $\mathcal{E}(m)-$modulo da 1 e $x_1, \ldots, x_n$. In altre parole ogni $f \in \mathcal{E}(n)$ si può scrivere
$$f = g + \sum_1^N h_r x_r$$
ove g e le h_r sono ottenute da funzioni in $\mathcal{E}(m)$ (tale scrittura non è univocamente determinata: ad esempio $x_1^2 x_2$ può scrversi sia $(x_1^2) \cdot x_2$ che $(x_1 x_2) \cdot x_1$).
Tale eguaglianza esprime f come somma di una funzione pari e una dispari ed è quindi chiaro che se f è pari, dovrà essere $f = g$. Si noti che in questo modo si vede anche che ogni f dispari è esprimibile come combinazione di $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti funzioni pari.
In modo del tutto analogo si dimostra che se un germe in $\mathcal{E}(n)$ cambia segno ogni volta che si cambia segno ad una sua variabile, allora può essere espresso come una funzione differenziabile dei quadrati x_i^2 delle coordinate.

Germi simmetrici

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *simmetrico* se per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ si ha :
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$
E' noto dall'algebra che l'insieme dei polinomi $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ che sono simmetrici costituiscono una sottoalgebra isomorfa all'anello dei polinomi in n variabili. Ad esempio un sistema di generatori indipendenti è costituito dai polinomi $P_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$ per $1 \leq k \leq n$. In altri termini si dimostra che per ogni polinomio P simmetrico nelle $x_1, \ldots, x_n$ esiste uno ed un sol polinomio Q in n variabili tale che:
$$P(X_1, \ldots, X_n) = Q(P_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, P_n(X_1, \ldots, X_n))$$

Un altra lista di polinomi simmetrici che genera in modo indipendente tutti gli altri, è quella costituita dai *polinomi simmetrici elementari* (da preferirsi all'altra in molte occasioni, tra l'altro perché funziona anche in caratteristica positiva) che sono costruiti svolgendo il prodotto:

$$(t - X_1) \cdot \ldots \cdot (t - X_n) = \sum_0^n t^i \sigma_{n-i}(x)$$

e prendendo i polinomi $(-1)^i \sigma_i(x)$ per $i = 1, \ldots, n$.
In particolare $\sigma_1(x) = x_1 + \ldots + x_n$ e $\sigma_n(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.
In altre parole i polinomi (o funzioni, come più spesso vengono chiamati) simmetriche elementari calcolate in $x_1, \ldots, x_n$ sono (a parte i segni) i coefficienti dell'unico polinomio monico di grado n che ha come radici $x_1, \ldots, x_n$.
Per $j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha quindi:

$$\sum_0^n x_j^i \sigma_{n-i}(x) = 0$$

che può essere scritta anche:

$$x_j^n = \sum_1^n x_j^i \sigma_{n-i}$$

Da ciò si deduce che detta $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ l'applicazione con componenti σ_i, e detto $\sigma^* : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo associato, Sia si ha:

$$x_j^n \in \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. In particolare ogni monomio di grado almeno n^n appartiene a tale ideale cosicché per k sufficientemente alto si ha

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è finitamente generato come modulo sulla algebra delle funzioni simmetriche ed anzi che è generato da un numero finito di polinomi (ad esempio dai monomi di grado inferiore a n^n). Se $f \in \mathcal{E}(n)$ è un germe simmetrico, esso si può quindi scrivere :

$$f(x) = \sum_1^N Q_r(x) \cdot F_r(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$$

ove le Q_r sono polinomi e le F_r germi differenziabili. Facendo operare il gruppo simmetrico si può supporre che anche i Q_r siano simmetrici; applicando allora il risultato di algebra richiamato sopra, si deduce che anche esse possono essere scritte some funzioni (polinomiali) delle σ_i; si è quindi dimostrato che ogni germe simmetrico può essere scritto come una funzione differenziabile delle funzioni simmetriche elementari.

Varietà immerse

Sia $H \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme. Una funzione $f : H \to \mathbb{R}$ è detta *differenziabile* se per ogni $x_0 \in H$ esistono un suo intorno aperto U in $\mathbb{R}^N$ ed una $F : U \to \mathbb{R}$ differenziabile tali che per ogni $x \in U \cap H$ sia $f(x) = F(x)$.

Se $H \subset \mathbb{R}^N$ e $K \subset \mathbb{R}^M$, una $f : H \to K$ è detta differenziabile se tali sono le sue M componenti in quanto funzioni di H in $\mathbb{R}$.

Diremo che $f : H \to K$ è un *diffeomorfismo* se f è biunivoca e differenziabile assieme alla sua inversa.

Siano $H \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in H$; lo *spazio tangente* ad H in x_0 è l'insieme $T(H)_{x_0}$ dei $v \in \mathbb{R}^N$ tali che per ogni aperto U in $\mathbb{R}^N$ che contiene x_0 e funzione differenziabile $h : U \to \mathbb{R}$ che sia nulla su $U \cap H$ si abbia $dh(x_0)[v] = 0$. E' chiaro che $T(H)_{x_0}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$.

Siano $H \subset \mathbb{R}^N$, $K \subset \mathbb{R}^M$, $f : H \to K$ differenziabile e $x_0 \in H$.
Per definizione esistono un aperto U in $\mathbb{R}^N$ contenente x_0 ed una $F : U \to \mathbb{R}^M$ differenziabile che coincide con f su $U \cap H$. Si verifichi per esercizio che $dF(x_0)$ applica $T(H)_{x_0} \subset \mathbb{R}^N$ in $T(K)_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}^M$ ed induce quindi una applicazione lineare $\sigma : T(H)_{x_0} \to T(K)_{f(x_0)}$. Inoltre tale σ non dipende dalla particolare estensione F scelta; ossia se U' è un altro aperto in $\mathbb{R}^N$ contenente x_0 e $F' : U' \to \mathbb{R}^M$ è differenziabile e tale che per $x \in U' \cap H$ sia $F'(x) = f(x)$, allora per $v \in T(H)_{x_0}$ si ha $dF(x_0)[v] = dF'(x_0)[v]$.
Si ottiene così una ben definita applicazione lineare $df(x_0) : T(H)_{x_0} \to T(K)_{f(x_0)}$ che sarà detta il *differenziale* di f in x_0.
Def. Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{R}^N$ è detto una *varietà differenziabile* di dimensione n se ogni suo punto ha un intorno aperto diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.
Diremo invece che H è una *varietà differenziabile a bordo* di dimensione n se ogni suo punto ha un intorno aperto diffeomorfo ad un aperto di $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
Esempi (.. definizioni,esercizi,complementi ..)

1. Consideriamo la varietà a bordo $X = [0, = \infty] \times \mathbb{R}^{n-1}$ e poniamo $\partial X = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Si verifichi che ogni diffeomorfismo $f : U \to V$ tra aperti di X applica $U \cap \partial X$ in $V \cap \partial X$. Ciò permette di definire il *bordo* ∂X per ogni varietà a bordo X di dimensione n e di dimostrare che esso è una varietà (senza bordo) di dimensione $n-1$. Ad esempio $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| \leq 1\}$ è una varietà compatta a bordo (detta il *disco* di dimensione n) il cui bordo è S^{n-1} (la *sfera* di dimensione $n-1$).

2. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ una applicazione differenziabile. Allora $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \ : \ x \in \Omega \ , \ y = f(x)\}$ è una varietà differenziabile di dimensione n (infatti $x \mapsto (x, f(x))$ è un diffeomorfismo tra Ω ed X).

3. Siano X , Y varietà differenziabili di dimensioni p e q; allora $X \times Y$ è una varietà differenziabile di dimensione $p + q$. Se una delle due è a bordo anche il prodotto lo è. Se entrambi hanno il bordo non vuoto, $X \times Y$ non è una varietà.

4. Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile tra varietà. Diremo che $x \in X$ è un *punto critico* per f se $df(x) : T(X)_x \to T(Y)_{f(x)}$ non è surgettiva; altrimenti diremo che x è un *punto regolare*.
Diremo che $y \in Y$ è un *valore critico* per f se è immagine di qualche punto critico. Altrimenti esso sarà detto un *valore regolare*.
Si dimostri che l'insieme dei punti critici è un chiuso in X e che l'insieme dei valori critici può non essere un chiuso in Y.

5. Sia $f : X \to Y$ differenziabile tra varietà di dimensione $n + p$ e p.
Si dimostri che se $y \in Y$ è un valore regolare allora $X_0 = f^{-1}(y)$ è una sottovarietà di X di dimensine n. Se ciò accade ed è $Y = \mathbb{R}^p$ e $y = 0$, diremo che f è una *equazione (globale) di definizione* per X_0 in x.
Si dimostri che se X_0 è una sottovarietà di X , ogni $x \in X_0$ ha un intorno aperto U sul quale esiste una equazione di definizione h per $X_0 \cap U$.

Una coppia del tipo (U, h) sarà detta una *equazione locale di definizione* per X_0 in X.

6. Una applicazione differenziabile $f : X \to Y$ tra varietà è detta un *prodotto* se esistono una varietà F ed un diffeomorfismo $h : X \to F \times Y$ tale che detta $p : F \times Y \to Y$ la proiezione canonica si abbia $p \circ h = f$. Necessariamente una tale f è priva di punti critici.

Viceversa se $f : X \to Y$ è differenziabile ed $x \in X$ è regolare, allora x ha un intorno aperto U in X tale che $f(U)$ è aperto in Y e la restrizione di f da U in $f(U)$ è un prodotto.

7. Sia 0 un valore regolare per $f : X \to \mathbb{R}$; allora $M = \{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$ è una varietà a bordo con $\partial M = f^{-1}(0)$. Si dimostri inoltre che in tal caso $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^n \ : \ ||y||^2 = f(x)\}$ è una *ipersuperficie* (ossia una sottovarietà di dimensione uno meno di quella dell'ambiente) in $X \times \mathbb{R}^n$.
Si cerchi di immaginare ad esempio che superficie è:

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = (4 - y^2) \cdot (y^2 - sin(x))\}$$

8. Una applicazione differenziabile $\phi : X \to Y$ tra varietà è detta una *immersion* se il suo differenziale $d\phi(x)$ è iniettivo per ogni $x \in X$. Diremo invece che è un *embedding* se è un diffeomorfismo tra X e la sua immagine; ciò equivale a dire che è una immersion ed è un omeomorfismo. Si noti che una immersion iniettiva può non essere un embedding: si può costruire una immersion iniettiva di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ in modo che la sua immagine sia una curva che disegna il numero 8 (se ne può dare esplicitamente una forma analitica esplicita parametrizzando opportunamente la curva piana di equazione $x^2 = y^2(1 - y^2)$. Diremo che una varietà X di dimensione n ha codimensione di embedding p se esiste un suo embedding in $\mathbb{R}^{n+p}$. Ad esempio la sfera S^n ha codimensione di embedding uno. Analoga definizione per la nozione di immersion.

E' facile dimostrare che per S^1 non esiste alcuna immersion in $\mathbb{R}$.
Si dimostri più in generale che una varietà compatta non vuota di dimensione n non ha alcuna immersion (e quindi neppure un embedding) in $\mathbb{R}^n$.

Più difficile è dimostrare che la superficie Δ definita al punto 7 non possiede alcun embedding in $\mathbb{R}^2$ (ossia non è diffeomorfa ad alcun aperto di $\mathbb{R}^2$); daremo nel seguito una dimostrazione di ciò utilizzando la teoria coomologica delle forme differenziali. Con metodi elementari si può invece costruire una immerion di tale Δ in $\mathbb{R}^2$.

9. Sia ϕ una applicazione differenziabile di una varietà a bordo X in una varietà (senza bordo) Y. Un punto $x_0 \in X$ è detto *regolare* per ϕ se o $x_0 \notin \partial X$ ed x_0 è un punto regolare per la restrizione di ϕ a $X - \partial X$, oppure $x_0 \in \partial X$ ed allora x_0 è regolare per la restrizione di ϕ a ∂X.

Si dimostri che se $x_0 \in \partial X$ è regolare per $\phi : X \to \mathbb{R}^n$, allora esiste un intorno aperto U di x_0 in X ed un diffeomorfismo h (un sistema di coordinate locali) tra U e $D^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+p} \ : \ ||x|| \leq 1 \ , x_{n+p} \geq 0\}$ per cui $h(0) = 0$ e l'applicazione ϕ diviene $(x_1, \ldots, x_{n+p}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.

Ciò può essere riformulato come segue: sia X una sottovarietà a bordo di una varietà a bordo Y; diremo che X è *ben messa* in Y se si ha:

$$\partial X = X \cap \partial Y$$

e se per ogni $x \in \partial X$ si ha:

$$T_x(\partial X) = T_x(X) \cap T_x(\partial Y)$$

Da quanto sopra detto si ottiene che se $\phi : M \to N$ è una applicazione differenziabile di una varietà a bordo M in una varietà (senza bordo) N, allora la fibra X di ϕ su un valore regolare, è una sottovarietà a bordo ben messa in M.

Spazi paracompatti e partizioni dell'unità

Nel seguito ogni spazio topologico è supposto (se non esplicitamente dichiarato) separato ed a base numerabile.
Definizioni:
- Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X è detta *puntualmente finita* se ogni $x \in X$ appartiene solo ad un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$; è detta *localmente finita* se ogni $x \in X$ possiede un intorno che incontra solo un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$.
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è *più fine* di una famiglia $\mathcal{G}$ se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{G}$.
- Uno spazio topologico X è detto *localmente compatto* se ogni punto possiede almeno un intorno compatto. E' facile verificare che allora gli intorni compatti di un punto costituiscono un suo sistema fondamentale di intorni.
- Uno spazio topologico X è detto *paracompatto* se per ogni ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che sia localmente finito e più fine di $\mathcal{U}$ (in generale $\mathcal{V}$ non è costruibile come una sottofamiglia di $\mathcal{U}$; si prenda ad esempio per $\mathcal{U}$ la famiglia delle palle di centro l'origine in $\mathbb{R}^n$).
- Uno spazio topologico X è detto *numerabile all'infinito* se è ricopribile con una successione (numerabile) di compatti ognuno contenuto nella parte interna del successivo; una tale successione di compatti verrà detta *esaustiva* .

Proposizione 24 *Ogni spazio localmente compatto è numerabile all'infinito*

Dim. Sia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di X; possiamo supporre che ogni B_n abbia chiusura compatta (infatti gli elementi della base originaria che hanno tale proprietà costituiscono ancora una base). Per ogni intero r sia H_r la chiusura di $B_0 \cup \ldots \cup B_r$. Per ogni intero r esiste un intero $s > r$ tale che H_r è contenuto nella parte interna di H_s e ciò dimostra che eliminando alcuni degli H_i si ottiene una successione esaustiva di compatti per X.

Proposizione 25 *Ogni spazio localmente compatto è paracompatto*

Sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione esaustiva di compatti per X. Per ogni intero $n \geq 1$ sia Ω_n l'aperto ottenuto togliendo alla parte interna di K_{n+1} il compatto K_{n-1}. La famiglia $\Omega_n)_{n\geq 1}$ è un ricoprimento aperto di X che è numerabile, localmente finito ed i cui elementi sono relativamente compatti.

Sia allora $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto qualsiasi di X; per ogni intero positivo n esiste $I_n \subset I$ finito tale che Ω_n sia contenuto nell'unione degli U_i per $i \in I_n$; ne segue che la famiglia degli $\Omega_n \cap U_i$ per n intero positivo ed $i \in I_n$ costituisce un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ localmente finito più fine di $\mathcal{U}$. Si noti che tale $\mathcal{V}$ è inoltre numerabile; non poteva che essere così perché in ogni ricoprimento aperto localmente finito di X gli aperti non vuoti sono al più una infinità numerabile.

Partizioni dell'unità

Diremo che una funzione f a valori reali su uno spazio topologico X è *localmente nulla* in $x \in X$ se essa è identicamente nulla su qualche intorno di x. L'insieme dei punti $x \in X$ nei quali f non è localmente nulla costituisce un chiuso che viene detto il *supporto* di f. Una famiglia $(f_i)_{i\in I}$ di funzioni su X è detta *localmente finita* se tale è la famiglia dei suoi supporti.

Una *partizione dell'unità* sullo spazio topologico X è una famiglia localmente finita $(f_i)_{i\in I}$ di funzioni continue su X tale che $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ per ogni $x \in I$. Tale partizione è detta *più fine* di un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ se così è la famiglia dei supporti delle f_i. Se inoltre accade che $I = J$ e per ogni $i \in I$ il supporto di f_i è contenuto in U_i allora diremo che la partizione è *subordinata* ad $\mathcal{U}$.

Lemma 26 *Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Se esiste una partizione $(f_j)_{j\in J}$ su X più fine di $\mathcal{U}$ allora ne esiste anche una $(F_i)_{i\in I}$ subordinata ad $\mathcal{U}$*

Dim. Per ipotesi esiste $\nu : J \to I$ tale che per ogni $j \in J$ il supporto di f_j sia contenuto $U_{\nu(j)}$. Per ogni $i \in I$ si definisca $F_i = \sum_{j\in\nu^{-1}(i)} f_j$; si verifica con un po(co) di lavoro che $(F_i)_{i\in I}$ è una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{U}$.

Teorema 27 *Su uno spazio localmente compatto ogni ricoprimento aperto ha partizioni dell'unità a lui subordinate*

Dim. La dimostrazione si avvale del teorema di esistenza di funzioni continue detto lemma di Uhrison. Per evitarne l'uso e per trattare allo stesso tempo gli analoghi risultati nel caso differenziabile, si può supporre che su X sia assegnata una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni continue che abbia la seguente proprietà:

- dati comunque $x \in X$ ed un intorno U di x esiste una $f \in \mathcal{F}$ non nulla in x ed avente supporto contenuto in U.

Se X è una varietà topologica (o differenziabile) si possono costruire famiglie siffatte trasportando tramite carte locali su X delle funzioni standard su $\mathbb{R}^n$; oppure se X è metrico si costruiscono facilmente funzioni continue con tale proprietà utilizzando la metrica stessa. Passando ai quadrati si può supporre che gli elementi di $\mathcal{F}$ siano funzioni positive.

Veniamo alla dimostrazione. Per quanto visto avanti si può supporre che il ricoprimento dato sia numerabile, localmente finito e costituito da aperti localmente compatti. Sia esso $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vogliamo definire induttivamente funzioni continue $g_n : X \to R$ ed aperti $V_n \subset X$ per $n \in \mathbb{N}$ soddisfacenti le condizioni:

- il supporto di g_n contiene V_n ed è contenuto in U_n

- $V_0, \ldots, V_n$ assieme a tutti gli U_i per $i > n$ ricoprono X

operiamo così : sia F il complementare di $\bigcup_{n>0} U_n$; esso è un compatto contenuto in U_0 ed utilizzando l' esistenza di funzioni locali si può costruire una

funzione continua g_0 strettamente positiva su F ed il cui supporto sia contenuto in U_0. Si scelga quindi per V_0 un intorno aperto di F contenuto nel supporto di g_0. Supposti costruiti $g_0, \dots g_n$ e $V_0, \dots V_n$ si considera il complementare F dell'unione di $V_0, \dots V_n$ con gli U_r per $r > n+1$ e si ripete la costruzione precedente ottenendo una g_{n+1} ed un V_{n+1}. Evidentemente la funzione $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ è positiva strettamente e le $f_n = g_n/g$ formano una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$.
Nota. E' chiaro che se X è una varietà differenziabile tutta la costruzione può essere fatta utilizzando funzioni differenziabli su X.

Le partizioni dell'unità saranno utilizzate spesso nel seguito. Il loro uso è di solito il primo gradino per globalizzare risultati di tipo locale. Ad esempio col loro uso si dimostra facilmente che ogni funzione differenziabile su un chiuso di $\mathbb{R}^n$ è restrizione di una funzione differenziabile su tutto $\mathbb{R}^n$. Oppure che le funzioni nulle su una sottovarietà compatta Y di una varietà X costituiscono un ideale finitamente generato nell'anello delle funzioni differenziabili su X; ciò rimane vero anche se Y è chiusa in X senza essere necessariamente compatta ma la dimostrazione è in tale ipotesi un pò più topologicamente elaborata .

Applicazioni proprie

In questa appendice ogni spazio topologico è supposto oltre che separato ed a base numerabile anche localmente compatto.

Definizioni
- Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è detta *chiusa* se trasforma chiusi di X in chiusi di Y. E' detta *propria* se è continua e se f^{-1} trasforma compatti di Y in compatti di X.
- Diremo che una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio topologico X *diverge* od anche che *tende all'*∞ se per ogni compatto $K \subset X$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \notin K$ per $n \geq n_0$. Per le ipotesi fatte su X ciò equivale al non possedere sottosuccessioni convergenti ossia a non avere punti aderenti.

Proposizione 28 *Sia $f : X \to Y$ continua. Sono equivalenti le condizioni:*
(a) f è propria
(b) f è chiusa ed $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$
(c) f trasforma successioni divergenti in X in successioni divergenti in Y

Dim.(a)$\Rightarrow$ (b) : Evidentemente le fibre di f sono compatte. Mostriamo che se C è chiuso in X allora $f(C)$ è chiuso in Y. Sia y in $Y - f(C)$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{K}$ degli intorni compatti di y. Essendo Y localmente compatto si ha $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$. Allora $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} f^{-1}(K) \cap C = \emptyset$ ed essendo tali insiemi compatti in X , l'intersezione di un numero finito di essi è vuota. Si ottiene quindi l'esistenza di un $K \in \mathcal{K}$ per il quale $f^{-1}(K) \cap C = \emptyset$ e ciò implica che $K \cap f(C) = \emptyset$; Quindi $f^{-1}(C)$ è chiuso perché ogni punto che non gli appartiene possiede un intorno che non lo interseca.
(b)$\Rightarrow$(c) : Se (c) non è verificata esiste una successione (x_n) divergente in X e tale che $f(x_n)$ converge ad un $y \in Y$. Essendo (x_n) divergente, l'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso in X; per (b) quindi $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso in Y. Se ne deduce che y deve essere uno degli $f(x_n)$; anzi, siccome ciò deve rimanere vero per ogni sottosuccessione deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_n) = y$ per ogni

$n \geq n_0$. Quindi la successione $(x_n)_{n\geq n_0}$ è contenuta in $f^{-1}(y)$ che per ipotesi è compatto e non può essere divergente contrariamente all'ipotesi fatta.
(c)$\Rightarrow$ (a) : Sia K un compatto in Y. Se per assurdo $f^{-1}(K)$ non fosse compatto in X, esso conterrebbe una successione (x_n) divergente in $f^{-1}(K)$ ma divergente anche in X perché esso è chiuso in X. Ma $(f(x_n))$ è una successione nel compatto K e non può quindi essere divergente; si è così contraddetto la (c) e la dimostrazione è conclusa.

Proposizione 29 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione propria. Se $y \in Y$ ed U è un aperto di X che contiene $f^{-1}(y)$, esiste un intorno V di y in Y tale che $f^{-1}(V) \subset U$.*
In altri termini : le immagini inverse di intorni di y costituiscono un sistema fondamentale di intorni per la fibra $f^{-1}(y)$

Dim. Sia $\mathcal{K}$ la famiglia degli intorni compatti di y in Y; si ha allora $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} f^{-1}(K) - U = \emptyset$. Essendo questa una famiglia di compatti, chiusa per intersezioni finite, se ne deduce l'esistenza di un $K \in \mathcal{K}$ tale che $f^{-1}(K) - U = \emptyset$ ossia $f^{-1}(K) \subset U$.

Varietà astratte

Chiameremo varietà topologica di dimensione n , ogni spazio topologico che sia di Hausdorff, a base numerabile ed in cui ogni punto abbia un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$. Fissare su X una struttura di varietà differenziabile (astratta) equivale ad aver scelto per ogni aperto $U \subset X$ una sottoalgebra $\mathcal{E}(U)$ dell'algebra $\mathcal{C}(U)$ delle funzioni continue a valori reali su U, i cui elementi saranno detti *funzioni differenziabili* o *regolari* su U , di modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

1. se $(U_i)_{i\in I}$ è una famiglia di aperti di X la cui unione è U ed $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora $f \in \mathcal{E}(U)$ se e solo se $f_{|U_i} \in \mathcal{E}(U_i)$ per ogni $i \in I$.

2. ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U che ammette un omeomorfismo con un aperto V di $\mathbb{R}^n$ che trasforma l'algebra $\mathcal{E}(U)$ nell'algebra delle funzioni differenziabili (nel senso usuale) su V. Una coppia (U, h) siffatta sarà detta una *carta regolare* su X.

Queste varietà saranno dette *astratte* mentre quelle definite nel precedente paragrafo saranno dette immerse.

Nota. Il significato di "immersione " è quello di "embedding" definito in un precedente esercizio. Purtroppo l'utilizzo di un termine inglese ha l'inconveniente di non poter essere declinato in modo italiano; ad esempio il plurale dovrebbe essere "embeddings" e si dovrà a volte usare il verbo "to embed" che verrebbe voglia di tradurre "embeddare" come talvolta si fa tra addetti ai lavori. Il problema linguistico si pone perché in inglese si hanno due termini "immersion" e "embedding" che vengono utilizzati come descritto prima. In francese sono state trovate due parole "immersion" e "plongement" ; in italiano potremmo utilizzare la parole "immersione" e "prolungamento" che però non è affatto la traduzione del termine francese che significa ancora "immersione" mentre prolungamento è quel che in francese si dice "prolongement". Potremmo utilizzare, a buon diritto, il termine "immissione" e parallelamente utilizzare i verbi "immergere" e "immettere" per distinguere i due concetti . Ma così non viene fatto da chi usa questi termini in Italia ed è invece più frequente udire l'utilizzo di termini inglesi o di altre lingue straniere declinati all'italiana, cosa che faremo anche noi nel seguito in diverse altre occasioni, rispettando quella che sembra essere una prassi ormai consolidata nell'uso volgare della lingua, spesso anche in assenza di giustificazioni di natura tecnica.

E' chiaro che ogni varietà immersa ha una struttura naturale di varietà astratta. Il teorema di immersione di Whitney, che sarà discusso tra poco asserisce che viceversa ogni varietà astratta è " diffeomorfa" a qualche varietà immersa. Cosa si intende per diffeomorfismo tra varietà astratte viene precisato nel modo seguente: siano X , Y due tali varietà; una applicazione $\phi : X \to Y$ è detta differenziabile se è continua e se per ogni scelta di aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ con $\phi(U) \subset V$ e funzione f regolare su V , la $f \circ \phi$ è regolare su U. Diremo allora che $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo se è biunivoca e differenziabile assieme alla sua inversa.

Nota. La costruzione di partizioni dell'unità differenziabili su varietà astratte può essere effettuata in modo analogo a come descritto avanti nel caso topologico.

Teorema 30 (Immersione di Whitney) *Sia X una varietà astratta compatta di dimensione n. Allora essa è diffeomorfa a qualche varietà immersa.*

Dim. Siano $(U_1, h_1), \dots, (U_r, h_r)$ carte su X tali che ogni $h_i(U_i)$ sia la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$ e gli $U_1, \dots, U_r$ ricoprano X e siano $0 < a < b < 1$ tali che gli aperti $V_i = \{x \in U_i \ : \ ||h_i(x)||^2 < a\}$ per $i = 1, \dots, r$ ricoprano X.
Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale $\phi(\lambda) = 1$ se e solo se $\lambda \leq a$ e $\phi(\lambda) = 0$ per $\lambda \geq b$.

La funzione $\phi_i = \phi(||h_i||^2)$ è differenziabile su U_i ed è nulla in un intorno della sua frontiera; essa può quindi essere estesa ad una funzione differenziabile su tutto X , che indicheremo ancora con ϕ_i, facendole assumere il valore zero nei punti fuori di U.
Analogamente le applicazioni $\tilde{h}_i(x) = \phi_i(x) \cdot h_i(x)$, poste uguali a zero fuori di U_i, saranno applicazioni differenziabili di X in $\mathbb{R}^n$.

Sia $\Phi : X \to \mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r$ definita da :

$$x \mapsto (\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_r(x), \phi_1(x), \dots, \phi_r(x))$$

Verificheremo ora che Φ è un diffeomorfismo tra X e una sottovarietà differenziabile in $\mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r$.

Φ è iniettiva : infatti siano $x_1, x_2 \in X$ con $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Per costruzione x_1 appartiene ad un V_{i_0} per cui $\phi_{i_o}(x_1) = 1$; allora essendo $\phi(x_2) = 1$ si ha anche $x_2 \in V_{i_0}$. Ora su V_{i_0} la $\tilde{h}_i$ coincide con la h_i ed essendo questa iniettiva si deduce che $x_1 = x_2$.

Φ ha inversa differenziabile : infatti localmente l'inversa di Φ , letta sulla carta (U_i, h_i) ristretta a V_i coincide con la restrizione di una delle proiezioni canoniche $\mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$.

Oss. Il teorema precedente rimane valido anche senza l'ipotesi di compattezza. La dimostrazione in tal caso utilizza la nozione di dimensione di Lebesque e alcuni risultati di topologia relativi ad essa.

Vedremo in seguito che ogni varietà di dimensione n è diffeomorfa ad una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n+1}$ ossia ha codimensione di embedding al più $n+1$.

Esempi (definizioni ...)

10. Ogni varietà immersa è, in modo naturale, una varietà astratta.

11. Sia X una varietà topologica di dimensione n. Una *carta* su X è una coppia (U, h) ove U è un aperto di X e h un omeomorfismo tra U ed un aperto di $\mathbb{R}^n$. Due tali carte (U_i, h_i) per $i = 1, 2$ sono dette *compatibili* se l'omeomorfismo di $h_1(U_1 \cap U_2)$ con $h_2(U_1 \cap U_2)$ indotto dalla composizione di h_2 con h_1^{-1} è un diffeomorfismo. Un *atlante regolare* su X è il dato di una famiglia di carte $(U_i, h_i)_{i \in I}$ su X a due a due compatibili e tali che $(U_i)_{i \in I}$ sia un ricoprimento di X. E' chiaro che allora esiste su X una ed una sola struttura di varietà differenziabile astratta in cui una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ su un aperto U di X è regolare se e solo se per ogni $i \in I$ la restrizione di f ad $U \cap U_i$ letta in $h_i(U \cap U_i)$ tramite h_i è differenziabile.

Questo è il modo nel quale spesso vengono introdotte varietà differenziabili.

Ad esempio sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ottenuto come spazio topologico come quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, per $0 \leq i \leq n$ l'insieme U_i dei punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che hanno un rappresentante $(x_0, \ldots, x_n)$ con $x_i \neq 0$ è un aperto sul quale le coordinate omogenee ottenute ponendo eguale ad uno la $i-$esima coordinata, danno un suo omeomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Tali $n+1$ carte danno un atlante regolare su $\mathbb{P}^n$.

12. Come sopra ma senza supporre che X sia uno spazio topologico.
Sia X un insieme qualsiasi. Una *carta* su X è una coppia (U, h) ove $U \subset X$ è un sottoinsieme e h una applicazione biunivoca tra U ed un aperto di $\mathbb{R}^n$. Due tali carte (U_i, h_i) per $i = 1, 2$ sono dette *compatibili* se l'applicazione biunivoca di $h_1(U_1 \cap U_2)$ con $h_2(U_1 \cap U_2)$ indotto dalla composizione di h_2 con h_1^{-1} è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Un *atlante regolare* su X è il dato di una famiglia di carte $(U_i, h_i)_{i \in I}$ su X a due a due compatibili, tali che $(U_i)_{i \in I}$ sia un ricoprimento di X e tali che sia di Hausdorff la topologia su X in cui un sottoinsieme $A \subset X$ è un aperto se e solo se per ogni carta (U_i, h_i) l'insieme $h_i(A \cap U_i)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$.
E' chiaro che un tale atlante individua come nel punto 11 una struttura di varietà (astratta) su X.

13. Nel punto 12 la condizione che la topologia di X venga di Hausdorff viene posta per evitare fenomeni del seguente tipo:
si incollino due copie di $\mathbb{R}$ identificando punti con la stessa ascissa se essa è diversa da zero: insiemisticamente il quoziente X può essere pensato come una retta in cui l'origine è stata sdoppiata in due punti; su tale X vi sono due carte compatibili tra loro ma che non verificano la condizione topologica (ossia non si ha uno spazio di Hausdorff). Questa sarà soddisfatta se e solo se per ogni coppia di carte date su X, la corrispondenza associata ha *grafico* chiuso nel prodotto: ossia se $\{(h_1(x), h_2(x)) \ : \ x \in U_1 \cap U_2\}$ è chiuso in $h_1(U_1) \times h_2(U_2)$. (Si rammenti che uno spazio è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$ è un chiuso in $X \times X$).

Ad esempio si controlli che se $X = \mathcal{G}r(p, n)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione p in $\mathbb{R}^n$ (verrà detta la *grasmanniana* dei $p-$piani in $\mathbb{R}^n$), i seguenti dati costituiscono un atlante regolare nel senso del punto 12:
detto N un insieme di n elementi (ad esempio $N = \{1, \ldots, n\}$), si identifichi $\mathbb{R}^n$

con l'insieme $\mathbb{R}^N$ delle applicazioni di N in $\mathbb{R}$. Per ogni sottoinsieme $P \subset N$ costituito da p elementi sia $k_P : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^P, \mathbb{R}^{N-P}) \to \mathcal{G}r(p,n)$ l'applicazione che associa ad ogni applicazione lineare il suo grafico; ogni tale k_P è iniettiva e quindi la sua inversa h_P è una carta. Tali h_P, al variare di P tra i sottoisiemi di cardinalità p in I, danno a $\mathcal{G}r(p,n)$ una struttura di varietà differenziabile.

14. Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile con una strurrura di gruppo in cui le operazioni $G \times G \ni (g,h) \mapsto G$ e $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ sono differenziabili.

Ad esempio $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n) \simeq$ gruppo delle matrici quadrate d'ordine n invertibili , $\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^n)$ =trasformazioni affini su $\mathbb{R}^n$ (ossia applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in se del tipo $x \mapsto Ax + b$ con $A \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$), il gruppo moltiplicativo del corpo dei reali, dei complessi, dei quaternioni.

Si può dimostrare che ogni sottogruppo chiuso H di un grupo di Lie G è una sottovarietà differenziabile e quindi anch'esso un gruppo di Lie (vien detto *sottogruppo di Lie*); è elementarmente dimostrabile (si può provare a farlo per esercizio) che in tal caso il quoziente G/H costituito dalle classi laterali sinistre, diviene una varietà considerando come funzioni differenziabili su un aperto $U \subset G/H$ le funzioni $f : U \to \mathbb{R}$ tali che $f \circ \pi$ sia differenziabile su $\pi^{-1}(U)$ ove $\pi : G \to G/H$ è la proiezione canonica. Ne segue che $\phi : G/H \to Z$ ove Z è una varietà differenziabile, Z è una applicazione differenziabile se e solo se $\phi \circ \pi$ lo è da G in Z. In particolare quindi se $H \subset G$ è anche normale, G/H è in modo naturale un gruppo di Lie.
Ciò dà un altro modo di introdurre la struttura differenziabile su $\mathcal{G}r(p,n)$:

sia $G = \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ ed H il sottogruppo degli automorfismi che conservano (cioè mandano in se) il sottospazio delle prime p coordinate; il quoziente G/H è identificabile in modo naturale con $\mathcal{G}r(p,n)$.

15. Si dimostri direttamente che se b è una forma bilineare simmetrica (o antisimmetrica) su $\mathbb{R}^n$, allora il gruppo $O(b)$ costituito dalle $\phi \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ che conservano b (ossia $b(x,y) = b(\phi(x), \phi(y))$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$) è una sottovarietà differenziabile di $\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$. Ad esempio se b è il prodotto scalare standard, detto $\mathcal{S}$ lo spazio delle matrici simmetriche di ordine n, si consideri l'applicazione f di $\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}$ definita da $A \mapsto {}^tAA$ e si dimostri che $I \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ è un punto regolare per f; essendo $O(b)$ un gruppo ne segue, con un ragionamento di omogeneità, che $I \in \mathcal{S}$ è un valore regolare.

16. $\mathbb{R}^n - \{0\}$ è diffeomorfo a $S^{n-1} \times]0, \infty[$ per l'applicazione:

$$\phi : x \to (x/||x||, ||x||)$$

Sia $X \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una sottovarietà ; essendo $\mathbb{R}$ diffeomorfo a $]0, +\infty[$, si può supporre che X sia contenuta in $\mathbb{R}^m \times]0, +\infty[$. Ne segue che $X \times S^p$ ha un embedding in $\mathbb{R}^m \times]0, +\infty[\times S^p \subset \mathbb{R}^{m+p+1}$. Quindi la codimensione di embedding (o immersion) di una varietà X in spazi euclidei non cresce per moltiplicazione con sfere (va escluso il solo caso in cui X sia ridotta ad un punto).

17. Sia $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ una curva piana (cioè una varietà di dimensione uno in $\mathbb{R}^2$). Sia W l'insieme delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ per le quali $x \in \Delta$ e o y coincide con x oppure la retta per x, y è tangente a Δ in x. Si dimostri che W è una varietà differenziabile di $\mathbb{R}^4$.
Vale un analogo risultato per una sottovarietà Δ di dimensione p in $\mathbb{R}^n$?

18. Siano X una varietà differenziabile , G un gruppo di diffeomorfismi di X in se e sia $\pi : X \to X/G$ il quoziente (topologico) di X per la relazione $x \equiv y$

se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g(x) = y$. Una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ ove U è un aperto in X/G sarà detta "regolare" se $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ è differenziabile.

Si discuta in quali dei casi seguenti X/G è una varietà differenziabile:

- $X = \mathbb{R}^n$, G ={traslazioni di $\mathbb{R}^n$ in se di vettore $v \in \mathbb{Z}^n$}.
- $X = \mathbb{R}^2$ e G generato dalle trasformazioni:
  $\sigma(x, y) = (x + 1, y) \qquad \tau(x, y) = (x, -y + 1)$
- $X = S^{n-1}$ e G generato dalla mappa antipodale $(x, y) \to (-x, -y)$
- $X = S^p \times S^q$ e G generato dalla mappa $(x, y) \to (-x, -y)$
- $X = S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ e G generato da
  $(z_1, z_2) \to (\omega_1 z_1, \omega_2 z_2)$ ove $\omega_1, \omega_2 \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$
- $X = \mathbb{R}^n$ e G generato dalla riflessione rispetto ad un iperpiano per l'origine
- $X = \mathbb{R}^2$ e G generato dalle riflessioni rispetto agli assi coordinati
- $X = \mathbb{R}^n$ e G generato dalla riflessione rispetto all'origine $x \mapsto -x$

Il teorema fondamentale dell'algebra

Questo paragrafo oltre a dare una dimostrazione di un importante risultato, costituisce soprattutto una introduzione abbastanza semplice a diverse tecniche che saranno sviluppate nel seguito in situazioni più complicate.

Teorema 31 *Ogni polinomio $P(T) \in \mathbb{C}[T]$ di grado positivo, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$*

Dim. Possiamo supporre che P sia monico:

$$P(T) = T^n + a_1 Y^{n-1} = \ldots + a_n$$

Indichiamo con $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione ottenuta calcolando P nei punti di $\mathbb{C}$.

A. ϕ è propria. Infatti per $|z| \to +\infty$ si ha $|\phi(z)| \to +\infty$ e quindi ϕ porta successioni divergenti in successioni divergenti.

B. ϕ è differenziabile su tutto $\mathbb{C}$; infatti il suo differenziale $d\phi(z_0)$ in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è precisamente l'applicazione di $\mathbb{C}$ in se data dalla moltiplicazione per il numero complesso $P'(z_0)$ ove P' indica il polinomio ottenuto derivando formalmente P, ossia:

$$P'(T) = nT^{n-1} + (n-1)a_1 T^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

Infatti calcolando con lettere (ossia *indeterminate*) T,H si ha:

$$P(T + H) = P(T) + P'(T) \cdot H + R(T, H) \cdot H^2$$

ove $R \in \mathbb{C}[T, H]$ è un polinomio. Sostituendo in tale espressione (T, H) con $(z_0, h) \in \mathbb{C}^2$ si ottiene quanto asserito.

Si noti in particolare che $d\phi(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è non solo lineare su $\mathbb{R}$ ma anche lineare su $\mathbb{C}$; funzioni a valori complessi definite su aperti di $\mathbb{C}$ e che hanno questa proprietà saranno nel seguito dette "differenziabili in senso complesso". In particolare al di fuori delle eventuali radici di P', il differenziale di ϕ sarà un isomorfismo e quindi ϕ sarà localmente invertibile.

C. ϕ è surgettiva (evidentemente ciò concluderà la dimostrazione) E' ben noto che ogni polinomio a coefficienti in un corpo che abbia grado positivo, ha un numero finito di radici (al più quanto il suo grado). Ne segue che l'insieme Σ delle radici di P' è finito e che sono finiti anche $\Delta = \phi(\Sigma)$ e $\bar{\Sigma} = \phi^{-1}(\Delta)$. Per restrizione ϕ induce quindi una applicazione ψ di $\mathbb{C}-\bar{\Sigma}$ in $\mathbb{C}-\Delta$ che è localmente invertibile ed ha quindi immagine aperta; inoltre essa è propria (si consideri un compatto in $\mathbb{C}-\Delta$; esso è anche compatto in $\mathbb{C}$ ...) ed ha quindi immagine chiusa. Essendo $\mathbb{C}-\Delta$ connesso tale restizione è surgettiva. In particolare l'immagine di ϕ contiene tutto $\mathbb{C}$ salvo al più l'insieme finito Δ ed è quindi densa in $\mathbb{C}$. Si conclude osservando che ϕ essendo propria (su $\mathbb{C}$) deve avere immagine chiusa.

Si può dimostrare che ψ è un rivestimento e verificare che ogni sua fibra ha cardinalità n. La ϕ è invece un esempio di "rivestimento ramificato" di grado n, nozione che viene studiata nell'ambito delle funzioni di più variabili complesse; attribuendo ai punti delle fibre di ϕ una molteplicità, ogni fibra "consiste" di n punti. Cercheremo ora di generalizzare quanto sopra nel caso di applicazioni differenziabili tra varietà.

Lo studio delle fibre di una applicazione

Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile tra varietà; supporremo che f sia propria e che Y sia connessa; per semplificare ci si può restringere al caso che X sia compatta.

La teoria può essere riformulata per applicazioni $f : X \to Y$ tra varietà a bordo, ma allora si devono fare ipotesi supplementari sul comportamento al bordo.

Siano $p = dim(Y)$ e $n + p = dim(X)$. Se $y \in Y$ è un valore regolare per f, allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà compatta (f è propria) di dimensione n che viene detta la *fibra* di f su y e sarà talvolta indicata con X_y.
E' facile vedere che se y_0 è un valore regolare per f, anche i punti di qualche suo intorno lo sono; ossia i valori regolari di f costituiscono un aperto Ω_f in Y. E' un pò più complicato assicurarsi che tali valori esistono; in effetti Ω_f è un aperto denso come si deduce da un teorema che viene comunemente chiamato lemma di Sard. La dimostrazione di tale lemma può essere trovata nel libretto di J. Milnor dal titolo "Topology from the differentiable viewpoint"; si rinvia ad esso anche per la trattazione del "grado modulo due" e "grado intero" cui si sono attenute le lezioni del corso (da pag. 10 a pag. 31) dando qui solo brevi indicazioni.

Supponiamo come sopra $f : X \to Y$ differenziabile e propria ed Y connessa (nel libretto di J. Milnor si considera solo il caso che X sia compatta ma le dimostrazioni funzionano automaticamente nel caso più generale). Supponiamo $dim(X) = dim(Y)$; allora la parità della cardinalità (sempre finita) delle fibre di f sui valori regolari è costante ed è detta *grado modulo due* di f. Inoltre se f, g sono omotope, per una omotopia differenziabile a supporto compatto (ossia tutte le applicazioni coincidono fuori di un compatto ma in realtà questa condizione potrebbe essere notevolmente indebolita) allora esse hanno lo stesso grado. Inoltre se X ed Y sono orientate, ad ogni punto regolare $x \in X$ può essere attribuito un segno (secondo che $df(x)$ conservi o no le orientazioni su $T_x(X)$ e $T_{f(x)}(Y)$) allora la somma algebrica dei segni sui punti di una fibra regolare è costante e si ottiene così un intero detto *grado intero* di f; anchesso risulta essere un invariante di omotopia (differenziabile, ma come vedremo avanti è la stessa cosa di quella continua). Un altro risultato per il quale rinviamo al suddetto libretto è quello del punto fisso di Brouwer : ogni applicazione continua del disco chiuso D^n in se ha almeno un punto fisso.

Fibrati

Famiglie di spazi
Sia $p : E \to X$ una applicazione continua tra spazi topologici; per $x \in X$, lo spazio topologico $E_x = p^{-1}(x)$ è detto *fibra* di p su x. Parleremo di p come di una *famiglia di spazi topologici* E_x *su* X o *parametrizzati* da $x \in X$.

Un *morfismo* tra due famiglie $p : E \to X$ e $p' : E' \to X$ sullo stesso spazio X è una applicazione continua $h : E \to E'$ tale che $p = p' \circ h$: penseremo a tale h come ad una famiglia di applicazioni continue $h_x : E_x \to E'_x$ che varia con continuità con $x \in X$. In particolare h sarà detto un *isomorfismo* se esiste un morfismo $k : E' \to E$ tale che $k \circ h$ e $h \circ k$ sono le identità su E , E'. Ciò è chiaramente equivalente a richiedere che h sia un omeomorfismo.

Nel seguito saremo interessati al caso in cui tutte le fibre E_x sono omeomorfe ad uno spazio tipo F fissato; parleremo allora di famiglie di spazi di tipo F. In particolare il prodotto $p : F \times X \to X$ verrà indicato come la famiglia *costante* (di tipo F) e se h è un isomorfismo tra una famiglia $p : E \to X$ e la famiglia costante, diremo che p è una *famiglia banale* o anche un *fibrato banale* ed h sarà detta una *banalizzazione* di esso.

Una famiglia $p : E \to X$ sarà detta un *fibrato a fibra* F, se ogni $x \in X$ stà in un aperto $U \subset X$ sul quale la famiglia è banale; ossia tale che la famiglia $p_{|U} : p^{-1}(U) \to U$ (restrizione di p ad U) sia banale.

Se nelle definizioni precedenti si sostituiscono spazi topologici con varietà differenziabili, applicazioni continue con differenziabili e omeomorfismi con diffeomorfismi, si ottiene la nozione di fibrato differenziabile.

Fibrati con gruppo strutturale

Sia $p : E \to X$ un fibrato a fibra F; ogni fibra E_x per $x \in X$ è omeomorfa ad F ma non è dato alcun omeomorfismo preferenziale: ogni banalizzazione di p su un aperto U che contenga x fornisce in particolare una identificazione tra E_x ed F ma questa dipende appunto dalla banalizzazione considerata e può essere cambiata con un qualsiasi altro omeomorfismo tra E_x ed F. Nella definizione che segue restringeremo tale arbitrarietà.

Un *gruppo topologico* è uno spazio topologico G su cui è data una struttura di gruppo definita da operazioni che sono continue: ossia $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ e $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ sono continue. Un *gruppo topologico di omeomorfismi* su uno spazio topologico F è il dato di un gruppo topologico G e di un omomorfismo iniettivo di G nel gruppo degli omeomorfismi di F in se tale che l'applicazione che alla coppia $(g, x) \in G \times F$ associa limmagine $g(x)$ di x secondo l'omeomorfismo associato a g, sia continua.

Se F è una varietà differenziabile, G è un gruppo di Lie e l'applicazione $G \times F \to F$ discussa sopra è differenziabile, diremo di avere un *gruppo di diffeomorfismi* su F.

Sia $p : E \to X$ un fibrato a fibra F e siano $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i$ per $i \in I$ una famiglia di banalizzazioni di E su aperti U_i di X. Per $i, j \in I$, sia

$h_{ij}(x)$ l'omeomorfismo di F in se ottenuto "confrontando" le due identificazioni di E_x indotte dalle banalizzazioni h_i e h_j (sostanzialmente $h_{ij}(x)$ è ottenuta componendo h_j con h_i^{-1}); diremo che le due banalizzazioni sono *compatibili* per G se tale omeomorfismo è in G per ogni $x \in U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $x \mapsto h_{ij}(x)$ è una applicazione continua (differenziabile se trattiamo fibrati differenziabili) di U_{ij} in G.

Se abbiamo fissato un fibrato $p : E \to X$ a fibra F ed una famiglia di banalizzazioni $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ a due a due compatibili e con gli U_i che formino un ricoprimento di X, parleremo di *fibrato a fibra F* e *gruppo strutturale G*: in tal caso una banalizzazione sarà detta *ammissibile* se è compatibile con tutte quelle fissate (evidentemente, come per le varietà differenziabili date attraverso un atlante, due strutture definite come sopra saranno ritenute eguali se le banalizzazioni ammissibili che esse definiscono sono le stesse).

Il caso che nel seguito interesserà maggiormente è il caso in cui F è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e G è il gruppo degli automorfismi lineari di F in se. Se la dimensione di F è p parleremo di *fibrati vettoriali* di rango p (reali o complessi).

Esempi (definizioni...)

19. Sia $\mathcal{M}(n,m)$ lo spazio vettoriale delle matrici ad n colonne e d m righe. Se $\sigma : X \to \mathcal{M}(n,m)$ è una applcazione continua su uno spazio topologico X si consideri l'applicazione $\bar\sigma : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^m$ definita da $\bar\sigma(x,v) = (x, \sigma(x)[v])$. Se rango $\sigma(x) = r$ per ogni $x \in X$, allora $\ker\bar\sigma = \{(x,v) \in X \times \mathbb{R}^n \ : \ \sigma(x)[v] = 0\}$ è un sottofibrato di $X \times \mathbb{R}^n$ di rango $n-r$ e $\mathrm{Im}\bar\sigma = \{(x, \sigma(x)[v]) : (x,v) \in X \times \mathbb{R}^n\}$ è un sottofibrato di rango r di $X \times \mathbb{R}^m$.

Se X è una varietà e σ è differenziabile, allora si ottiene un fibrato vettoriale differenziabile.

20. Siano X uno spazio topologico, $N \in \mathbb{N}$ ed $E \subset X \times \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme; indichiamo con $p : E \to X$ la restrizione della proiezione canonica e per $x \in X$ sia $E_x \subset \mathbb{R}^N$ tale che $p^{-1}(x) = \{x\} \times E_x$. Se E è chiuso in $X \times \mathbb{R}^N$ e se E_x è un sottospazio vettoriale di dimensione p in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in X$, allora $p : E \to X$ è un fibrato vettoriale (continuo). Se poi X è anche una varietà differenziabile ed E è una sottovarietà di $X \times \mathbb{R}^N$, allora esso è un fibrato differenziabile.

21. Per $p \leq n$ interi naturali, $E = \{(H,v) \in \mathcal{G}r(p,n) \times \mathbb{R}^n \ : \ v \in H\}$ è un fibrato vettoriale differenziabile sulla grassmanniana $\mathcal{G}r(p,n)$ che viene detto il *fibrato tautologico* (perché la fibra su $H \in \mathcal{G}r(p,n)$ coincide con H).

22. Se $p : E \to X$ è un fibrato vettoriale (continuo) di rango p e $\phi : Y \to X$ è una applicazione continua, posto $E' = \phi^*(E) = \{(y,e) \in Y \times E \ : \phi(y) = p(e)\}$ e detta $p' : E' \to Y$ la restrizione della proiezione canonica, si ottiene un fibrato vettoriale di rango p su Y. Se E è un fibrato vettoriale differenziabile, Y è una varietà e ϕ è differenziabile allora anche E' sarà un fibrato differenziabile.

I fibrati tangente e normale

Proposizione 32 *Se $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile di dimensione n,*

$$T(X) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ x \in X \ , \ v \in T(X)_x\}$$

è una varietà differenziabile di dimensione $2n$

Dim. Sia $(x_0, v_0) \in T(X)$; essendo X una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$, esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ ed una applicazione differenziabile $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ per la quale 0 sia un valore regolare e tale che $f^{-1}(0) = X \cap U$. E' facile verificare che allora $T(X) \cap (U \times \mathbb{R}^N)$ è il luogo di zeri in $U \times \mathbb{R}^N$ della applicazione

$$U \times \mathbb{R}^N \ni (x, v) \mapsto F(x, v) = (f(x), df(x)[v])$$

La dimostrazione sarà conclusa dalla verifica che $(0, 0)$ è un valore regolare per F ossia che ogni (x_0, v_0) è un punto regolare per essa, ossia che il differenziale in tale punto è surgettivo su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Basta quindi osservare che tale differenziale è dato dalla "matrice":

$$dF(x_0, v_0) = \begin{pmatrix} df(x_0) & 0 \\ ? & df(x_0) \end{pmatrix}$$

Proposizione 33 *Se $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile di dimensione n,*

$$N(X, \mathbb{R}^N) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ x \in X \ , \ v \in T(X)_x^\perp\}$$

è una varietà differenziabile di dimensione N

Dim. Analoga a quella della proposizione precedente; oppure si dimostri in generale che per ogni sottofibrato differenziabile in $X \times \mathbb{R}^N$, il suo "complemento ortogonale " è ancora un sottofibrato differenziabile.

Nota. $T(X)$ sarà detto il *fibrato tangente* ad X e $N(X, \mathbb{R}^N)$ il *fibrato normale* ad X in $\mathbb{R}^N$.

Intorni tubolari

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà di dimensione n. Per $\epsilon > 0$ poniamo

$$D_\epsilon(X) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, X) \leq \epsilon\} \qquad N_\epsilon(X) = \{(x, v) \in N(X, \mathbb{R}^N) \ : \ ||v|| \leq \epsilon\}$$

e consideriamo l'applicazione differenziabile $\Phi : N(X, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ definita dalla formula $\Phi(x, v) = x + v$.

Teorema 34 *Se X è compatta, esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \epsilon < \epsilon_0$ l'applicazione Φ induce un diffeomorfismo tra le varietà a bordo $N_\epsilon(X)$ e $D_\epsilon(X)$.*

In particolare per ogni $x \in D_\epsilon(X)$ esiste uno ed un solo $r(x) \in X$ tale che $d(x, r(x)) = d(x, X)$ e l'applicazione $r : D_\epsilon(X) \to X$ è un fibrato differenziabile a fibra il disco unitario D^{N-n} in $\mathbb{R}^{N-n}$ e gruppo strutturale il gruppo ortogonale

Dim. Per $y \in \mathbb{R}^N$ indichiamo con $\phi_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la funzione $\phi_y(x) = ||x - y||^2$. Essendo X compatta, la sua restrizione ad X ha un minimo x_0 e conseguentemente ha differenziale nullo in x_0. Il differenziale di ϕ_y come funzione su $\mathbb{R}^N$ è calcolabile con lo sviluppo:

$$\phi_y(x_0 + h) = ||x_0 + h - y||^2 = ||x_0 - y||^2 + 2 < x_0 - y, h > + ||h||^2$$

che dà : $d\phi_y(x_0)[h] = 2 < x_0 - y, h >$. Quindi la restrizione di ϕ_y ad X ha un punto critico in x_0 se e solo se $x_0 - y = v$ è ortogonale a $T_{x_0}(X)$; in tal caso $(x_0, v) \in N(X, \mathbb{R}^N)$ e $\Phi(x_0, v) = y$. Se $y \in D_\epsilon(X)$ allora $||v|| < \epsilon$ e quindi si è mostrato che $\Phi : N_\epsilon(X) \to D_\epsilon(X)$ è surgettiva per ogni $\epsilon > 0$.

Vediamo ora che per ϵ sufficientemente piccolo, Φ ha differenziabile invertibile in ogni punto di D_ϵ e quindi è una applicazione localmente invertibile. Basterà controllare che ciò è vero nei punti di $X \times \{0\}$ perché allora ciò sarà vero in qualche intorno di $X \times \{0\}$ e quindi su qualche $N_\epsilon(X)$ perché questi ne costituiscono un sistema fondamentale di intorni. Avendo dominio e codominio la stessa dimensione basterà mostrare che per $x \in X$ la Φ ha differenziale surgettivo nel punto $(x, 0)$. Ciò segue immediatamente osservando che lo spazio tangente ad X in x è in tale immagine (perché $\Phi : X \times \{0\} \to X$ è un diffeomorfismo) ed anche il suo ortogonale (perché Φ applica $\{x\} \times T_x(X)^\perp$ con un diffeomorfismo sul sottospazio affine "ortogonale" ad X in x.

Resta quindi da mostrare che per ϵ sufficientemente piccolo, Φ è iniettiva su $\mathbb{N}_\epsilon(X)$. Ragioniamo per assurdo: per ogni n intero positivo, esistono quindi $(x_n, u_n) \neq (y_n, v_n)$ in $N_{1/n}(X)$ sui quali Φ assume gli stessi valori, ossia $x_n + u_n = y_n + v_n$. Per compattezza di X una sottosuccessione degli (x_n) convergerà ad un $x_0 \in X$; siccome u_n e v_n vanno a zero, anche gli y_n tenderanno ad x_0; quindi in ogni intorno di $(x_0, 0)$ vi sono punti distinti (x_n, u_n) e (y_n, v_n) sui quali Φ assume gli stessi valori e ciò contrasta col fatto che in $(x_0, 0)$ la Φ è localmente invertibile.

Per $0 < \epsilon < \epsilon_0$, chiameremo $D_\epsilon(X)$, l'*intorno tubolare* di raggio ϵ di X e $r : D_\epsilon(X) \to X$ sarà detta la *proiezione ortogonale* su X. Si noti inoltre che per tali ϵ, l'insieme $S_\epsilon(X) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, X) = \epsilon\}$ è una sottovarietà differenziabile di codimensione uno in $\mathbb{R}^N$ e $r : S_\epsilon(X) \to X$ è un fibrato differenziabile a fibra la sfera di dimensione $N - n - 1$ e gruppo strutturale il gruppo ortogonale.

Altra conseguenza: se $X \subset \mathbb{R}^N$ è una sottovarietà compatta (senza bordo), allora la funzione *distanza da* X è non solo continua su $\mathbb{R}^N$ ma il suo quadrato è differenziabile in un intorno di X.

Confronto tra omotopie differenziabili e continue

Siano X Y due spazi topologici; due applicazioni continue f_0 , $f_1 : X \to Y$ sono dette *omotope* se esiste una applicazione continua $F : X \times [0, 1] \to Y$ tale che per $x \in X$ si abbia $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$. Chiaramente questa è una relazione di equivalenza sull'insieme delle applicazioni continue di X in Y; lo spazio quoziente associato sarà indicato con $\big[X, Y\big]$.
Se X Y sono varietà differenziabili ed f_0 f_1 sono applicazioni differenziabili di X in Y, esse sono *differenziabilmente omotope* se esiste tra loro una omotopia (come sopra definita) F che sia una applicazione differenziabile. Non è a priori chiaro che questa sia una relazione di equivalenza sull'insieme delle applicazioni differenziabili di X in Y perchè il modo usuale di congiungere due omotopie, non assicura la differenziabilità lungo i punti di congiunzione; tale differenziabilità è però assicurata se congiungiamo omotopie F che sono localmente "costanti" negli estremi di $[0, 1]$ nel senso che esiste $\epsilon > 0$ tale che per $x \in X$ e $t \in [0, \epsilon]$ si ha $F(x, t) = F(x, 0)$ e $F(x, 1-t) = F(x, 1)$. A tale tipo di omotopie (differenziabili) ci si può ricondurre considerando una funzione $\rho : [0, 1] \to [0, 1]$ che sia differenziabile, che valga zero su $[0, 1/3]$ ed uno su $[2/3, 1]$ ed associando ad una qualsiasi omotopia F la sua "riparametrizzazione" $\tilde{F}$ definita da : $\tilde{F}(x, t) = F(x, \rho(t))$. Quindi si ha una relazione di equivalenza cui è associato un quoziente che indicheremo con $\big[X, Y\big]_\infty$.

Chiaramente si ha una applicazione naturale $\mu : [X,Y] \to [X,Y]_\infty$.

Teorema 35 *Se X Y sono compatte l'applicazione μ sopra definita è biunivoca.*

Dim. Possiamo supporre che sia $X \subset \mathbb{R}^N$ ed $Y \subset \mathbb{R}^M$; sia inoltre fissato un intorno tubolare $r : D(Y) \to Y$. Si noti che se f , g sono due applicazioni di X in Y che hanno distanza inferiore ad ϵ (ossia $||f(x) - g(x)|| < \epsilon$ per ogni $x \in X$), allora l'eguaglianza $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ definisce una omotopia tra f e g che è inoltre differenziabile se f e g lo sono.

Utilizzando un teorema di approssimazione (di Weierstrass od altro che assicuri l'approssimabilità di funzioni continue su un compatto di $\mathbb{R}^n$ con funzioni differenziabili) si ottiene intanto che μ è surgettiva. Per l'iniettività, se $F : X \times [0,1] \to Y$ è una omotopia continua tra due applicazioni differenziabili f_0 e f_1, si consideri una successione $0 = t_0 < t_1 < ... < t_q = 1$ tale che posto $f_i(x) = F(x, t_i)$ ogni f_i disti meno di $\epsilon/2$ dalla successiva. Approssimando a meno di $\epsilon/2$ ciascuna di esse (per $1 < i < q$) con una applicazione differenziabile, si passa da f_0 ad f_1 con un numero finito di passaggi tra applicazioni differenziabili aventi distanza inferiore ad ϵ e quindi differenziabilmente omotope tra loro; per transitività avremo che f_0 ed f_1 sono differenziabilmente omotope; quindi μ è iniettiva.

Nota. La dimostrazione precedente può essere modificata in modo da non utilizzare la compattezza di Y : sostanzialmente in tale caso più generale, si deve avere un embedding proprio di Y in uno spazio euclideo e si deve riformulare la nozione di intorno tubolare per comprendere il caso di varietà non compatte. Utilizzando teoremi un pò più fini di approssimazione con funzioni differenziabili (ottenibili per esempio da quello di Weierstrass utilizzando partizioni dell'unità) si può fare a meno anche dell'ipotesi che X sia compatto, cosicché il precedente teorema vale per X , Y varietà qualsiasi.

Il teorema di fibrazione

Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile propria tra varietà. Se $y_0 \in Y$ è un valore regolare allora la fibra $X_{y_0} = f_{-1}(y_0)$ è una varietà compatta, anzi siccome i valori regolari formano un aperto tutte le fibre X_y per y sufficientemente vicino ad y_0 saranno varietà compatte. Il teorema che ora esporremo, mostra che tali varietà sono tutte diffeomorfe ad X_{y_0}.

Teorema 36 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile propria e sia $y_0 \in Y$ un suo valore regolare. Esiste un intorno aperto U di y_0 in Y ed un diffeomorfismo $h : f^{-1}(U) \to U \times X_{y_0}$ tale che su $f^{-1}(U)$ si abbia $p \circ h = f$ essendo $p : U \times X_{y_0} \to U$ la proiezione canonica.*

In altri termini l'applicazione $f : f^{-1}(U) \to U$ è diffeomorfa alla proiezione $p : U \times X_{y_0} \to U$

Dim. Si può supporre $Y = \mathbb{R}^p$ e $X \subset \mathbb{R}^N$. Fissiamo un intorno tubolare $r : D_\epsilon(X_0) \to X_0$ di X_0 in $\mathbb{R}^N$ e sia $U \subset \mathbb{R}^p$ un intorno aperto dell'origine tale che $f^{-1}(U) \subset D_\epsilon(X_0)$. Definiamo $h : f^{-1}(U) \to X_0 \times U$ come l'applicazione che applica x in $(r(x), f(x))$. Per costruzione $f = p \circ h$. Resta da mostrare che se U è sufficientemente piccolo, h è un diffeomorfismo. Ciò segue dalle asserzioni

seguenti:
a. h induce un diffeomorfismo tra X_0 e $X_0 \times \{0\}$
b. h è localmente invertibile nei punti $x \in X_0$; basterà dimostrare che in tali punti il suo differenziale è surgettivo, perché dominio e codominio hanno la stessa dimensione.
Ed infatti in $h(x) = (x, 0)$, lo spazio tangente ad $X_0 \times \{0\}$ è nell'immagine per quanto detto in a. Considerando ora la proiezione di $X_0 \times U \to U$, l'immagine del differenziale di h contiene il nucleo del differenziale di p e viene applicato surgettivamente sullo spazio tangente in 0 ad U (infatti $p \circ h = f$ e x è un punto regolare per f).

Possiamo quindi supporre, rimpicciolendo eventualmente U che h sia localmente invertibile su tutto $f^{-1}(U)$. Ragionando per assurdo come si è fatto per l'iniettività nel teorema dell'intorno tubolare, si ottiene che:
c. si può supporre che h sia iniettiva.
Resta da mostrare che per U opportuno, h è anche surgettiva. Si noti che h è propria; infatti essa è a valori in un prodotto ed una delle componenti (la f) è propria. Ne segue che $Im(h)$ è un chiuso; ma $Im(h)$ è anche aperto perché h è localmente invertibile e quindi aperta. Quindi $Im(h)$ è una unione di componenti connesse di $X_0 \times U$; se U è connesso, X_0 incontra tutte le componenti connesse di $x_0 \times U$ ed essendo $X_0 \subset Im(h)$, si avrà $IM(h) = X_0 \times U$.

Varietà quasi complesse

Sia V uno spazio vettoriale reale; una applicazione lineare $J : V \to V$ tale che $J^2 = -I$, ove I indica l'identità su V, sarà detta una *struttura complessa* su V. Fissata una tale J si può definire una moltiplicazione $\mathbb{C} \times V \to V$ con la formula:

$$(x + iy) \cdot v = x \cdot v + y \cdot (Jv)$$

ed in tal modo V diviene uno spazio vettoriale complesso.

Viceversa ogni spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale su cui è fissato un endomorfismo (la moltiplicazione per $i = \sqrt{-1}$) il cui quadrato è meno l'identità.

Una *varietà quasi complessa* è una varietà differenziabile X ove per ogni $x \in X$ è stata fissata una struttura complessa J_x su $T_x(X)$ che "varia differenziabilmente" nel senso che l'applicazione $J : T(X) \to T(X)$ definita da $J(x, v) = (x, J_x(v))$ è differenziabile.

Una applicazione $f : X \to Y$ tra varietà quasi complesse è detta *olomorfa* se è differenziabile e se $df(x) : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $x \in X$.

Esempi (...) 23. Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà orientata di dimensione due. Ogni $T_x(X)$ per $x \in X$ è uno spazio vettoriale orientato di dimensione due su cui è fissato un prodotto scalare definito positivo (in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^N$). Su esso ha senso quindi parlare di "rotazione di angolo α; scegliendo come struttura complessa la rotazione di $\pi/2$ si ottiene una struttura quasi complessa su X.

24. $\mathbb{C}^N$ è in modo naturale una varietà quasi complessa. Si verifica facilmente che le applicazioni polinomiali di $\mathbb{C}^N$ in $\mathbb{C}^M$ sono olomorfe; anzi che il loro differenziale in un punto è precisamente l'applicazione $\mathbb{C}$-lineare indotta

dalla matrice costituita dalle derivate formali (in quanto polinomi) dei polinomi componenti: basterà calcolarli in $z_1 + h_1, \ldots, z_N + h_N$ e sviluppare i binomiali che ne risultano.

Anzi, se $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ è un aperto e P, Q sono polinomi in N variabili con Q mai nullo in Ω, allora P/Q rappresenta una applicazione olomorfa di Ω in $\mathbb{C}$. Per dimostrarlo è sufficiente dimostrare che l'applicazione di $\mathbb{C}^*$ in se definita da $z \mapsto z^{-1}$ è olomorfa.

25. Una varietà complessa è una varietà quasi complessa che sia localmente biolomorfa ad aperti di $\mathbb{C}^n$. Ad esempio lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n = \{$rette per l'origine in $\mathbb{C}^{n+1}\}$ è una varietà complessa. Si dimostri che se $P(Z_0, \ldots, Z_n)$ è un polinomio omogeneo di grado d in $n+1$ variabili, il suo luogo di zeri $X = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}^n : P(z) = 0\}$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n$ se in ogni suo punto almeno una delle derivate formali $\partial P/\partial z_i$ è diversa da zero.
In tal caso X sarà detta una *ipersuperficie di grado* d in $\mathbb{P}^n$.

26. In modo analogo si definiscono i *gruppi di Lie complessi*, grassmanniane, ed anche varietà complesse ottenute per quoziente di altre, ad esempio :

a. se Γ è un sottogruppo discreto in $\mathbb{C}^n$, allora $\mathbb{C}^n/\Gamma$ possiede una ovvia struttura di varietà complessa.

b. Sia Γ il gruppo di biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$ in se generato da $A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{C})$. Se A non ha autovalori di modulo 1 allora $\mathbb{C}^n - \{0\}/\Gamma$ è una varietà complessa (si ponga A in forma di Jordan).

Nota. Si può dimostrare che ogni varietà quasi complessa di dimensione due è una varietà complessa. Per dimensioni maggiori (quattro o più) ciò non accade: devono essere verificate alcune condizioni non banali dette di *integrabilità*, necessarie e sufficienti affinché una data struttura quasi complessa sia complessa. Questo risultato non è affatto banale; è invece facile dimostrarlo se si suppone che le strutture di varietà differenziabile e quella della struttura quasi complessa siano analitiche reali. Discuteremo di ciò nella parte di variabile complessa.

Teorema 37 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione olomorfa propria tra varietà quasi complesse. Se Y è connessa, l'insieme Ω dei valori regolari di f è un aperto denso connesso. Di conseguenza le fibre di f sui valori regolari sono tutte diffeomorfe tra loro*

Dim. Che Ω sia un aperto denso deriva dal teorema di Sard più il fatto che f è propria. Per dimostrare che è connesso si noti che per ogni punto critico $x \in X$, l'applicazione $df(x) : T_x(X) \to T_f(x)(Y)$, essendo $\mathbb{C}$-lineare per le strutture complesse esistenti su tali spazi e non essendo surgettiva, avrà immagine un sottospazio complesso che dal punto di vista reale avrà codimensione almeno due; la dimostrazione viene allora conclusa dal seguente teorema.

Teorema 38 *Sia $f : X \to Y$ differenziabile e propria. Sia $C = \{x \in X \ : \ df(x)$ ha immagine di codimensione almeno due $\}$ e sia $C' = f(C)$. Allora per ogni aperto Ω connesso non vuoto in Y, anche $\Omega - C'$ è un aperto non vuoto connesso*

Dim E' chiaro che C è chiuso e quindi anche C' lo è perché f è propria; inoltre, essendo C' fatto di punti critici, per il lemma di Sard non ha parte interna. Quindi $\Omega - C'$ è un aperto non vuoto. Dobbiamo mostrare che è connesso.

Esaminiamo dapprima il caso $Y = \mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo la proiezione p di $\mathbb{R}^{n+1}$ sullo spazio $\mathbb{R}^n$ delle ultime n coordinate e sia D l'insieme dei valori critici di $p \circ f$. Se $y \in \mathbb{R}^n$ non è in D, allora per ogni $x \in X$ con $f(x) = y$, l'immagine di $d(p \circ f)$ ha dimensione n e quindi l'immagine di $df(x)$ ha codimensione maggiore o eguale ad n; ciò significa che nessun tale x può appartenere a C'. In definitiva per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $p^{-1}(x) \cap C' = \emptyset$.

Siano ora x, y due punti di $\mathbb{R}^n - C'$;cambiando coordinate in $\mathbb{R}^{n+1}$ di modo che il primo vettore di base sia un multiplo di $x - y$, si ottiene l'esistenza di una retta parallela ad $x - y$ e passante vicino quanto si vuole ad x ed a y e che non incontra C'; siccome C' è un chiuso si può fare in modo che tale retta incontri palle di centri in x ed in y che siano disgiunte da C' ed è così chiaro che x ed y sono congiungibili da un cammino che non incontra C'.

Torniamo ora al caso generale; sappiamo quindi che in ogni punto $x \in \Omega$ se prendiamo una palla P di centro x e contenuta in Ω, essendo P diffeomorfa ad un $\mathbb{R}^{n+1}$ e considerando l'applicazione $f : f^{-1}(P) \to P$,si ha che $P - C'$ è connesso. In altri termini sappiamo che C' non sconnette localmente Ω. Se per assurdo fosse $\Omega - C'$ sconnesso, esisterebbero due aperti non vuoti disgiunti A, B con $A \cup B = \Omega - C'$; essendo C' privo di parte interna, le chiusure (fatte in Ω) di A e B avrebbero unione tutto Ω e quindi ,essendo questo connesso, dovrebbero incontrarsi in almeno un punto x: se P è una palla di centro x e contenuta in Ω si ha che $A \cap C'$ e $B \cap C'$ sono non vuoti e quindi $P - C'$ è sconnesso, contrariamente a quanto mostrato prima. Quindi Ω è connesso e ciò conclude la dimostrazione.

Teoremi di isotopia

Siano X, M varietà differenziabili, X compatta. Una applicazione differenziabile $f : X \to M$ è detta un *embedding* se rappresenta un diffeomorfismo tra X e una sottovarietà $f(X)$ di M. Per la compattezza di X, ciò equivale a richiedere che f sia differenziabile, iniettiva e abbia differenziale iniettivo in ogni punto di X.

Due embeddings sono detti *isotopi* se esiste $F : X \times [0, 1] \to M$ tale che utilizzando la notazione $F(x, t) = F_t(x)$ si abbia che $F_0 = f_0, F_1 = f_1$ e F_t è un embedding per ogni $t \in [0, 1]$. E' facile verificare che ciò equivale a richiedere che l'applicazione $X \times [0, 1] \to M \times [0, 1]$ definita da $(x, t) \to (F(x, t), t)$ è un embedding. Una tale F è detta una *isotopia* tra f_0 e f_1. Diremo invece che f_0, f_1 sono *fortemente isotopi* se esiste $\Phi : M \times [0, 1] \to M$ differenziabile e tale che:

(1) per ogni $t \in [0, 1]$ Φ_t è un diffeomorfismo di M in se

(2) esiste un compatto K in M tale che per $x \notin K$ e $t \in [0, 1]$ sia $\Phi(x, t) = x$

(3) Φ_0 è l'identità di M in se.

(4) $f_1 = f_0 \circ \Phi_1$.

In altre parole si richiede che l'applicazione definita da $(x, t) \to (\Phi(x, t), t)$ sia un diffeomorfismo di $M \times [0, 1]$ in se che è l'identità su $M \times [0, 1]$ e fuori di un compatto in $M \times [0, 1]$ e tale che il diffeomorfismo indotto da $M \times [0, 1]$ in se trasformi f_0 in f_1.

Teorema 39 *Siano f_0 , $f_1 : X \to M$ embeddings della varietà compatta X. Esse sono isotope se e solo se sono fortemente isotope.*

dim. $\Leftarrow$ è facile: data Φ la formula $F(x,t) = \Phi(f_0(x,t),t)$ definisce l'isotopia tra f_0 e f_1.

$\Rightarrow$ Data F l'applicazione $G : (x,t) \to (F(x,t),t)$ è un embedding in $M \times [0,1]$. Possiamo al solito supporre, per non avere problemi al bordo di $M \times [0,1]$ che F non dipenda localmente da t all'intorno di $X \times \{0\}$ e di $X \times \{1\}$ cosicché G può essere pensata come una applicazione di $X \times \mathbb{R}$ in $M \times \mathbb{R}$.

Consideriamo su $X \times \mathbb{R}$ il campo tangente costante $S = (0,1) \in T(X \times \mathbb{R}) \equiv T(X) \oplus T(\mathbb{R})$ e sia S' il campo tangente a $Y = G(X \times \mathbb{R})$ immagine di S' tramite il differenziale di G.

Mostreremo ora l'esistenza di un campo di vettori tangenti T su $M \times \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: (1) $T(x,t) = (v(x,t),1)$ e quindi le curve integrali di T sono del tipo $(a(x,t),t)$

(2) T è una estenzione di S' .

Il flusso associato a tale campo fornirà allora la Φ cercata.

Che un tale T esista si dimostra osservando che in generale ogni campo tangente ad una sottovarietà (come Y) è localmente estendibile ad un campo tangente all'ambiente (nel nostro caso $M \times \mathbb{R}$), perché localmente esistono sistemi di coordinate locali nei quali l'ambiente è un prodotto della sottovarietà per uno spazio euclideo. Sia quindi $(T_i)_{i\in I}$ una famiglia di estenzioni locali di S' definite su un ricoprimento localmente finito $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ di un intorno aperto di Y in $M \times \mathbb{R}$. Si può supporre che tali estenzioni abbiano la seconda componente mai nulla. Completiamo tale situazione ad un ricoprimento di tutto $M \times \mathbb{R}$ considerando sul complementare di Y il campo costante $(0,1)$. Incolliamo tra loro tali campi utilizzando una partizione dell'unità; il campo ottenuto è quasi quello cercato: gli manca solo di avere la seconda componente 1; ma essendo per costruzione tale componente mai nulla, esso può essere diviso per essa ed il risultato sarà quello cercato.

Nota Quanto visto sopra vale anche (con dimostrazione analoga) nel caso che X sia una varietà a bordo.

Unicità dei dischi

Sia D^p il *p-disco standard* (= disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^n$). Un p-disco in una varietà M è per definizione un embedding di D^p in M. Due p-dischi sono detti equivalenti se sono isotopi come embeddings.

Teorema 40 *Sia M una varietà connessa di dimensione n . Se $p < n$ o M è non orientabile, vi è una sola classe di p-dischi in M; altrimenti si hanno esattamente due classi, distinte dalle orientazioni che essi inducono su M.*

dim. gSia $f : D^p :\to M$ un embedding. Se $0 < a < 1$ la formula $F(x,t) = f((1+t(a-1))x)$ definisce una isotopia tra f e la sua "restrizione" al disco di raggio a. Scelto un intorno di $f(0)$ in M diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, siamo così ricondotti ad esaminare il caso $M = \mathbb{R}^n$ e potremo anche supporre che sia $f(0) = 0$. Sviluppando f si ha: $f(x) = df(0)[x] + R(x)[x]$ ove $R(x)$ è un polinomio di grado due (da $\mathbb{R}^n$ in se); quindi $f(tx) = df(0)[tx] + R(tx)[tx] = tdf(0) + t^2R(tx)[x]$ dividendo per t si ottiene che $df(0)[x] + tR(tx)[x]$ è una isotopia tra gli embeddings f e $df(0)$. La dimostrazione del teorema viene ora facilmente conclusa utilizzando le proprietà di connessione di $\mathcal{G}l(n,\mathbb{R})$ e la connessione di M.

Unicità degli intorni tubolari(non di programma) Sia X una sottovarietà compatta di una varietà M. Il *fibrato normale* di X in M è (se M è una sottovarietà d'uno spazio euclideo V) $\mathcal{N}(X, M) = \{(x, v) \in V : v$ è tangente a M in x e ivi ortogonale a $X\}$ (se M è una varietà astratta, può essere definito come il "quoziente" del fibrato tangente ad M ristretto ad X modulo il fibrato tangente ad X).

Per $\epsilon > 0$ sia $D_\epsilon = \{(x, v) \in \mathcal{N}(X, M) : \|v\| \leq \epsilon\}$. Per definizione un *intorno tubolare di X in M* è un embedding f di D_ϵ in M il cui differenziale nei punti $(x, 0)$ sia "l'identità" (nel caso astratto si richiede che tale differenziale induca un supplementare del tangente di X nel tangente ad M). Si dimostra poi, nello stesso modo dei dischi (che rappresentano il caso in cui X è ridotto ad un punto) il teorema di unicità seguente :

Teorema 41 *Se f_0, f_1 sono due intorni tubolari di X in M, esiste un diffeomorfismo h di M in se (isotopo all'identità per una isotopia a supporto compatto) tale che $f_1 = h \circ f_0$.*

In particolare se $\Delta \subset X$ è una sottovarietà con fibrato normale banalizzato da un framing, non solo esistono embeddings $\sigma : \Delta \times D_p \to X$ tali che $\sigma(\Delta \times \{0\}) = \Delta$ e il cui differenziale induca il framing dato ma anche ogni due tali embeddings sono fortemente isotopi; in particolare le mappe ottenute a partire da tali embeddings per costruzione di Pontrjagin sono omotope.

Topologia delle varietà algebriche

Sia $F(x_0, \ldots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado p in $n+1$ variabili e sia $X = \{(x) \in \mathbb{P}^n : F(x) = 0\}$. Diremo che F è regolare in $x \in X$ se esiste $i \in \{0, \ldots, n\}$ tale che la derivata formale $\partial F / \partial x_i(x)$ è non nulla in x.

Lemma 42 *Se F è regolare in $\bar{x} \in X$, esiste un intorno aperto U di $\bar{x}$ in $\mathbb{P}^n$ tale che $X \cap U$ è una varietà differenziabile di dimensione $n-1$.*

Dim. Una almeno delle componenti di $\bar{x}$ è non nulla; sia essa la prima. Quindi $\bar{x} \in U_0 = \{(x) \in \mathbb{P}^n : x_0 \neq 0\}$; su U con coordinate non nomogenee $x_1, \ldots, x_n$, il polinomio $P(x_1, \ldots, x_n) = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ è una funzione olomorfa che ha per luogo di zeri $X \cap U_0$. Per il teorema di Eulero $p \cdot F(x) = \sum_0^n x_i \partial F / \partial x_i$; se $F(\bar{x}) = 0$, non possono annullarsi in $\bar{x}$ tutte le derivate formali $\partial F / \partial x_i$ con $i > 0$, perché allora anche $\partial F / \partial x_0$ si annullerebbe in $\bar{x}$. Ne segue che OP ha in $\bar{x}$ almeno una derivata non nulla e l'enunciato segue da un teorema di funzioni implicite.

Oss. Sempre utilizzando il teorema di Eulero si dimostra che un luogo di zeri in $\mathbb{P}^n$ di r polinomi omogenei (di vari gradi) è una varietà differenziabile di dimensione $n-r$ all'intorno di un punto $\bar{x}$, se la marice delle derivate formali di tali polinomi rispetto alle variabili omogenee di $\mathbb{P}^n$ calcolate in $\bar{x}$ ha rango r; in tal caso diremo che tali polinomi sono *funzionalmente indipendenti* in $\bar{x}$.

Questi risultati si estendono senza fatica al caso di polinomi multiomogenei: ad esempio se $F(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m)$ è un polinomio che è omogeneo di grado p nelle x_i e omogeneo di grado q nelle y_j, risulta ben definito il suo luogo di zeri X in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ed esso è una varietà differenziabile di dimensione $n+m-1$

all'intorno di $\bar{x}$, se almeno una delle derivate formali $\partial F/\partial x_i$ o $\partial F/\partial y_j$ è non nulla in $\bar{x}$.

Chiameremo *ipersuperficie liscia* di grado p in $\mathbb{P}^n$ ogni $X \subset \mathbb{P}^n$ che sia il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di grado p in $n+1$ variabili che è regolare in ogni punto di X.

Se X è il luogo di zeri in $\mathbb{P}^n$ di polinomi omogenei $F_1, \ldots, F_r$ rispettivamente di gradi $p_1, \ldots, p_r$ funzionalmente indipendenti in ogni punto di X, esso verrà chiamato una *intersezione completa* di dimensione $n-r$ e *multigrado* $(p_1, \ldots, p_r)$. Analoghe definizioni nel caso multiomogeneo.

Siano $\mathbb{P}$ lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado p in $n+1$ variabili, $W = \{(F,x) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}^n : F(x) = 0\}$ e $\sigma : W \to \mathbb{P}$, $\tau : W \to \mathbb{P}^n$ le restrizioni delle proiezioni naturali.

Teorema 43
a) W è una ipersuperficie liscia in $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^n$
b) Un punto $(F,x) \in W$ è critico per σ se e solo se il polinomio F non è regolare in x
c) Se $F \in \mathbb{P}$ è regolare per σ, allora τ induce un biolomorfismo tra $\sigma^{-1}(F)$ e l'ipersuperficie luogo di zeri di F in $\mathbb{P}^n$

Dimostrazione: a) W è il luogo di zeri in $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^n$ del polinomio (notazioni multiindici) $\sum_{|I|=p} a_I x^I$ che è omogeneo di grado p nelle x_i e di grado 1 nelle a_I; le sue derivate formali rispetto alle a_I sono i monomi x^I che non possono essere tutti nulli in alcun punto di $\mathbb{P}$.

b) , c) sono lasciati per esercizio suggerendo di esprimere la situazione in termini di coordinate non omogenee (che servono da coordinate locali).

Equazioni di sottovarietà

Sia Y una sottovarietà di codimensione p della varietà $n-$dimensionale X. Una *equazione (o sistema di equazioni) per* Y è una $\phi : X \to \mathbb{R}^p$ differenziabile, tale che 0 sia un valore regolare per ϕ e $\phi^{-1}(0) = Y$. Una condizione (ovviamente) necessaria per l'esistenza di una tale equazione è che Y sia chiusa in X ; semplici esempi mostrano che ciò non è sufficiente (ad esempio $X = S^1$ e Y costituita da un solo punto. Oppure si osservi che se X è orientabile, ogni $Y \subset X$ che ha una equazione è pure orientabile; in particolare nessuna sottovarietà non orientabile in $\mathbb{R}^n$, come ad esempio gli spazi proiettivi reali di dimensione pari, può avere una equazione. Più difficile verificare, lo faremo nel secondo semestre, che neppure $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ può avere equazioni in alcun $\mathbb{R}^n$ ove sia realizzato).

Tratteremo ora l'esistenza di equazioni nel caso che Y abbia codimensione uno. Utilizzeremo il seguente lemma, facile conseguenza del teorema di divisione elementare:

Lemma 44 *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con f una equazione per l'ipersuperficie $Y \subset X$ e g differenziabile e nulla su Y. Allora esiste (unica) una funzione differenziabile $h : X \to \mathbb{R}$ tale che $g = hf$. Se anche g è una equazione per Y allora h non ha zeri.*

dim. Su $X - Y$ la h deve essere necessariamente g/f che è ivi differenziabile; verifichiamo che essa è estendibile ad una funzione differenziabile su X. Siccome Y è privo di parte interna, le eventuali estenzioni continue sono univocamente determinate; quindi è sufficiente mostrare la locale estendibilità differenziabile nei punti di Y. Ma leggendo localmente all'intorno di un punto di Y tramite un opportuno sistema di coordinate, la f diviene la prima coordinata x_1 e g una funzione nulla per $x_1 = 0$ e la dimostrazione è conclusa applicando il teorema di divisione elementare.

Il lemma precedente non ha analoghi nel caso di codimensione maggiore di uno (almeno così semplici e generali) ed in effetti l'esistenza di equazioni diviene in tal caso un problema molto più complicato.

Teorema 45 *Sia X una varietà differenziabile connessa e sia $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ per qualche $x_0 \in X$. Sono fatti equivalenti:*
- Ogni ipersuperficie (=sottovarietà di codimensione uno) di X ha una equazione
- $\mathcal{H}om(\Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$

La dimostrazione richiederà l'introduzione di alcuni nuovi concetti che saranno sviluppati nei prossimi due paragrafi.
$(2 \Longrightarrow 1)$ Sia Y una ipersuperficie chiusa in X ; ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U sul quale $Y \cap U$ ha una equazione. Esistono quindi un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in U}$ di X e per ogni $i \in I$ una equazione $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ per $U \cap Y$. Per il lemma precedente $f_i/f_j = f_{ij}$ è una funzione differenziabile mai nulla su $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Mostreremo nel successivo paragrafo sui ricoprimenti semplici che possiamo supporre:
Ipotesi: per ogni $i, j \in I$ se U_{ij} è non vuoto, allora è contrattile; in particolare è connesso e semplicemente connesso
Allora $f_{i,j}$ su U_{ij} ha un segno costante che indichiamo con $\epsilon_{i,j} \in \{+1, -1\}$. Notiamo che per come costruite le $f_{i,j}$, se i, j, k sono tali che $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ è non vuoto, allora $f_{i,j} f_{j,k} = f_{i,k}$ come funzioni su U_{ijk} e di conseguenza $\epsilon_{i,j}\epsilon_{j,k} = \epsilon_{i,k}$. Supponiamo per il momento che ogni ϵ sia $+1$.
scelta una partizione dell'unità $(\phi_i)_{i \in I}$, la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f = \sum_{i \in I} f_i \phi_i$ è una equazione per Y perchè le f_i hanno tutte lo stesso segno nei punti fuori di Y e nei punti di Y le df_i "puntano" tutte dalla stessa parte rispetto allo spazio tangente ad Y e df , che è una loro combinazione baricentrica, è sicuramente non nullo. Quindi il problema di costruire una equazione per Y , è ricondotto a quello di poter aggiustare i segni nel senso seguente: sia fissato per ogni $i \in I, \epsilon_i \in \{+1, -1\}$; le funzioni $\tilde{f}_i = \epsilon_i f_i$ sono evidentemente equazioni per le $Y \cap U_i$. Esse possono essere ben incollate con una partizione dell'unità come sopra (ossia le f_i/f_j sono tutte positive), se valgono le relazioni $\epsilon_{i,j} = \epsilon_i/\epsilon_j$ per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto.

Le condizioni affinchè tali ϵ_i esistano saranno determinate nel paragrafo sulla descrizione formale del gruppo fondamentale , il che concluderà questa parte della dimostrazione. In tale occasione sarà anche indicata una dimostrazione di $(1 \Longrightarrow 2)$.

Buoni ricoprimenti

Nel passaggio da soluzioni locali a soluzioni globali è spesso utile e talvolta necessario, conoscere l'esistenza di ricoprimenti aperti arbitrariamente fini, tali che non solo ogni aperto del ricoprimento sia "semplice "per il problema che stiamo trattando, ma anche ogni intersezione finita di essi lo sia.

Nel caso in esame definiamo *semplice* un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di uno spazio topologico X se:

(1) è localmente finito
(2) se $i_0, \cdots, i_p \in I$ sono tali che $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$, allora tale aperto è contrattile.
Chiameremo invece *buono* un ricoprimento aperto di X se è semplice ed inoltre si ha :
(3) se $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$ allora $U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_p}$ è contrattile.

Nel seguito, trattando di varietà differenziabili, intenderemo che il termine "contrattile" nelle definizioni precedenti significhi "diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$".

Proposizione 46 *Se X è aperto di $\mathbb{R}^n$, esso ha ricoprimenti buoni arbitrariamente fini.*

dim. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Costruiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che è buono e più fine di $\mathcal{U}$ nel modo seguente. Fissiamo una famiglia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di $\mathbb{R}^n$ che ricoprano X ed ognuno dei quali sia contenuto nella parte interna del successivo. Allora per $n \geq 2$, $K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$ è coperto da un numero finito di palle aperte $\mathcal{U}-$piccole (cioè contenute in qualche elemento di $\mathcal{U}$) e contenute in $\overset{\circ}{K}_{n+2} - K_{n-1}$. E' chiaro come in questo modo si possa costruire un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ di X localmente finito, più fine di $\mathcal{U}$ e tale che se $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p} \neq 0$ allora esso e $V_{i_0} \cup \cdots \cup V_{i_p}$ sono aperti stellati (rispetto a qualche loro punto) limitati in $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione è quindi conclusa dal seguente:

Lemma 47 *Ogni aperto stellato limitato $V \subset \mathbb{R}^n$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$*

dim.(non nel programma di esame) Supponiamo che V sia stellato in $0 \in \mathbb{R}^n$.

Asserzione 1 : esiste una successione (ϕ_n) di funzioni differenziabili su S^{n-1} tali che :
1. per ogni n sia $0 < \phi_n < \phi_{n+1}$
2. l'unione dei $V_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi_n(x/\|x\|)\}$ è tutto V.

Dimostriamo l'asserto. Sarà sufficiente mostrare che esiste una successione $(\phi)_n$ di funzioni continue, verificanti 1. e 2. , perchè allora, approssimando (con Weierstrass) abbastanza finemente le ϕ_n con funzioni differenziabili, si ha la famiglia richiesta (precisamente, se $r_n = d(\phi_n, \phi_{n+1})$, si approssimi ϕ_n a meno di $\frac{1}{2}inf\{r_n, r_{n-1}\}$).

Sia quindi $\rho : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ definita da $\rho(x) = sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda x \in V\}$.
Tale ρ è semicontinua nel senso che per $x_0 \in S^{n-1}$ e $\epsilon > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che per $y \in U$ si ha $\rho(y) > \rho(x_0) - \epsilon$.

Sia $\mathcal{R} = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n] : f < \rho\}$. Questa è una famiglia numerabile il cui primo elemento può essere scelto una costante $f_0 \in \mathbb{Q}$ positiva (perchè ρ ha un minimo positivo.

Poniamo $\phi_n = sup_i\{f_i\}$. Allora $0 < \phi_n \leq \phi_{n+1}$.Tale successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa la proprietà 2. . Infatti se $x_0 \in V$, $\|x_0\| < \rho(x_0/\|x_0\|)$;
per semicontinuità di ρ , esiste un intorno U di x_0 tale che $\rho > \|x_0\|$ in U. Allora esiste una funzione continua $\sigma : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ con $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$ e $\mathrm{supp}(\sigma) \subset U$. Quindi $\sigma < \rho$ e $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$. Se $\epsilon > 0$ è tale che $\rho - \sigma > \epsilon$ ossia $\sigma + \epsilon < \rho$, approssimando sufficientemente $\sigma + \epsilon$ con un elemento $f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ si trova una $f \in \mathcal{R}$, quindi $f = f_n$ per qualche n e $f_n(x_0/\|x_0\|) > \|x_0\|$.

Manca da soddisfare la condizione $\phi_n < \phi_{n+1}$. Essa non sarà in generale soddisfatta ma sarà ottenibile cancellando alcune ϕ_i e ciò conclude la dimostrazione dell'asserzione 1.

Asserzione 2: Sia $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ differenziabile e sia $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi(x/\|x\|)\}$. Allora esiste un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se che trasforma una palla aperta in V.

Dimostriamo questa asserzione: $\mathbb{R}^n - 0$ può essere pensato come $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ tramite il diffeomorfismo (coordinate polari):

$$S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \ni (s, r) \to r \cdot s \in \mathbb{R}^n - \{o\}.$$

Considereremo applicazioni $F : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to S^{n-1} \times R^+$ del tipo $F(s,r) = (s, h(s,r))$ ove $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è differenziabile ; ogni tale f sarà evidentemente differenziabile. Articoleremo il ragionamento nei seguenti quattro passi:
A) Se esiste $\epsilon > 0$ tale che $h(s,r) = r$ per $r < \epsilon_0$, tale F induce una applicazione differenziabile di $\mathbb{R}^n$ in se che è l'identità vicino all'origine.
B) Se $\partial h/\partial r > 0$, allora F rappresenta un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (teorema di inversione locale + iniettività).
C) Se inoltre $\lim_{r\to+\infty} = +\infty$ per ogni s , allora F è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se. In tal caso , $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ viene trasformato su $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h(x/\|x\|, 1)\}$. Affinchè sia $\Omega = V$, occorre quindi che valga anche la :
D) $h(x/\|x\|, 1) = \phi(x/\|x\|)$.

Dimostriamo ora l'esistenza di una $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ soddisfaciente le quattro condizioni A,B,C e D.
Siano $0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \phi$. E' facile costruire funzioni differenziabili $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificanti le condizioni :
- $\lambda(t) = 1$ per $t \leq \epsilon_0$, $\lambda(t) = 0$ per $t \geq 1$, $\lambda \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = M < \epsilon_1$.
- $\mu(t) = 0$ per $t \leq \epsilon_0$ o $t \geq 1$, $\mu \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = M < \epsilon_1$.

Si vede facilmente che la funzione $h(s,r) = \int_0^r (\lambda(t) + (\phi(s) - M)\mu(t))dt$ verifica le condizioni richieste.

Asserzione 3. Esistono diffeomorfismi $F_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che trasformano $B(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < p\}$ in V_p e tali che per $p \geq 2$, F_p coincide con F_{n-1} su $B(n-1)$. Ciò viene dimostrato sostanzialmente nello stesso modo dell'asserzione 2.

Definiamo ora $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con la formula : $F(x) = F_p(x)$ se $x \in B(p)$. E' chiaro che F è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e V.

Per estendere la costruzione fatta nel caso di un aperto di $\mathbb{R}^n$ al caso di una varietà differenziabile qualsiasi , supponiamo $X \subset \mathbb{R}^n$ e definiamo una sorta di "convessi" su X che "funzionano" come i convessi di $\mathbb{R}^n$.
Def. Un *dominio a frontiera liscia* in una varietà differenziabile X di dimensione n , è un aperto Ω di X che verifica le proprietà :
1. Ω è la parte interna della sua chiusura
2. $\bar{\Omega}$ è una sottovarietà compatta a bordo di X

Ciò è equivalente a richiedere:
1'. Ω è relativamente compatto in X
2'. ogni $x_0 \in \partial\Omega$(=frontiera topologica di Ω) ha un intorno U su cui esiste una funzione differenziabile $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$ e se $f(x) = 0$, allora $df(x) \neq 0$. Una tale f è detta una *equazione* su U per il bordo di Ω.

Fortemente convessi in $\mathbb{R}^n$

Siano X un dominio a frontiera liscia in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial\Omega$, U un intorno aperto di x_0 in $\mathbb{R}^n$ ed h una equazione locale per $\partial\Omega$ su U. Chiameremo *hessiano di h* in X la forma quadratica su $T(\partial\Omega)_{x_0}$ che è restrizione della forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ associata alla matrice $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(x_0))$; essa verrà indicata con $\mathcal{H}(h)(x_0)$.

Lemma 48 *Se k è un'altra equazione locale su U per $\partial\Omega$, allora esiste una costante positiva ρ tale che $\mathcal{H}(k) = \rho\mathcal{H}(h)$.*

Def. Per il lemma precedente la segnatura di $\mathcal{H}(h)$ (ossia la terna (a, b, c) data dai suoi indici di positività , negatività e nullità) è indipendente dalla particolare equazione utilizzata e sarà detta la *segnatura* di Ω in $x_0 \in \partial\Omega$

Dim. del Lemma: Per il teorema di divisione , si ha che $k = rh$ con $r : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile mai nulla in U anzi strettamente positiva perchè h, k sono entrambe negative su $\Omega \cap U$.

confrontiamo gli hessiani di h, k ; calcoliamo prima su $\mathbb{R}^n$:

- $\partial k/\partial x_i = \partial r/\partial x_i + r\partial h/\partial x_i$
- $\partial^2 k/\partial x_i \partial x_j = (\partial^2 r/\partial x_i \partial x_j)h + (\partial r/\partial x_i)(\partial h/\partial x_j) +$
$+ (\partial r/\partial x_j)(\partial h/\partial x_i) + r(\partial^2 h/\partial x_i \partial x_j)$

Calcolando in x_0 si ha $h = 0$, quindi il primo addendo del secondo membro si annulla. Vediamo poi che calcolando l'hessiano di k su un vettore $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$, anche il secondo e terzo addendo si annullano , cosicchè solo il quarto membro rimane e quindi $\mathcal{H}(k)(x_0) = r(x_0)\mathcal{H}(h)(x_0)$ ove $r(x_0) \neq 0$.
Infatti la matrice data da secondo e terzo membro si può scrivere:

$(\nabla r)(\nabla h)^* + (\nabla h)(\nabla r)^*$ (M^* indica la trasposta della matrice M).
Il suo valore su un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è dato da $v^*(\nabla r)(\nabla h)^* v + v^*(\nabla h)(\nabla r)^* v$ ed essendo l'equazione di $T(\partial\Omega)_{x_0}$ esattamente $v^*(\nabla h) = 0$ od anche $(\nabla h)^* v = 0$, tale espressione si annulla per $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$.

Nota Si può dare la seguente caratterizzazione della segnatura (a, b, c) di un dominio liscio in un suo punto x_0 del bordo:

Sia $H \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio affine ; diremo che esso è *tangente* a X in x_0 se $x_0 \in H$ e se la direzione di H (unico sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di cui H è un traslato) è contenuto in $T(\partial\Omega)_{x_0}$. Un tale H è detto *tangente internamente* (risp. *tangente esternamente*) a X in x_0 se è tangente nel senso precisato sopra ed esiste $\epsilon > 0$ tale che $H_\epsilon = \{v \in H : 0 < \|v - x_0\| < \epsilon\} \subset \Omega$.

Considerando la restrizione della funzione h ad H si vede facilmente che $a \leq$massima dimensione dei sottospazi affini tangenti esternamente ad Ω in x_0 $\leq a + c$ e b è riferito analogamente alle possibili dimensioni degli spazi affini tangenti internamente. Ne segue che se l'hessiano è non degenere , ossia $c = 0$, allora a e b misurano esattamente tali dimensioni.

Def. Un aperto *fortemente convesso* in $\mathbb{R}^n$ è un dominio a frontiera liscia , connesso ed avente segnatura $(n - 1, 0, 0)$ in ogni punto del bordo.

Proposizione 49 *Un aperto fortemente convesso in $\mathbb{R}^n$ è convesso.*

Dim. Siano $x_0, x_1 \in \Omega$; dobbiamo mostrare che $[x_0, x_1] \subset \Omega$. Essendo Ω connesso , esiste una curva $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Sia $\Delta = \{t \in [0, 1] : [x_0, \gamma(t)] \not\subset \Omega\}$ Tale Δ è chiaramente un chiuso in $[0, 1]$, quindi se non vuoto ha un primo elemento t_0. E' facile convincersi che allora la retta H per $x_0, \gamma(t_0)$ è tangente internamente a $\partial\Omega$ in qualche suo punto $\bar{x}$. Ma allora la segnatura di $\partial\Omega$ in $\bar{x}$, dovrebbe avere $b + g > 0$ contro l'ipotesi.

Nota : La segnatura di un dominio liscio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non cambia , cambiando linearmente le coordinate di $\mathbb{R}^n$; tale nozione è quindi trasportabile su uno spazio vettoriale (o affine) qualsiasi.

Fortemente convessi in sottovarietà di $\mathbb{R}^n$

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà .

Def. Un *dominio fortemente convesso* in X è un dominio liscio $\Omega \subset X$ tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ $\pi_x : X \to T(X)_x$ induce un diffeomorfismo tra $\bar{\Omega}$ e la chiusura di un dominio fortemente convesso di $T(X)_x$ (ossia è un dominio che "letto" dallo spazio tangente di un qualsiasi punto della sua chiusura , "appare" fortemente convesso).

Proposizione 50 *Siano $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile e $x_0 \in X$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo , $B_\epsilon = \{x \in X : \|x - x_0\|^2 < \epsilon\}$ è un dominio fortemente convesso di X.*

Dim.(non nel programma di esame) La proiezione ortogonale di $T(X)_x$ su $H = T(X)_{x_0}$ per x in un intorno sufficientemente piccolo U di x_0 in X , è un isomorfismo ; si ottiene così , utilizzando anche una carta locale su X di centro x_0 una applicazione $f(x,y) : U \times \mathbb{R}^n \to H$ che rappresenta $\phi_x(y)$ e che è chiaramente differenziabile. Per $\epsilon > 0$ indichiamo con D_ϵ la chiusura di B_ϵ in X. Mostriamo che esiste $\epsilon > 0$ tale che per $x \in D_\epsilon$, π_x induce un diffeomorfismo tra D_ϵ e la sua immagine e questa è un dominio fortemente convesso.
Iniettività di $d\pi_x$:
per assurdo esisterebbero x_h , $y_h \in \mathbb{R}^n$ e $v_h \in S^{n-1}$ tali che $df_{x_h}(y_h)[v_h] = 0$. Passando al limite in qualche sottosuccessione per cui v_h converga , si avrebbe $df_0(0)[v] = 0$ che non è possibile perchè f_o è l'identità e $\|v\| = 1$.
Iniettività di π_x:
per assurdo esisterebbero $x_h, a_h \neq b_h \in \mathbb{R}^n$ tali che $f_{x_h}(a_h) = f_{x_h}(b_h)$. Utilizzando lo sviluppo $f(x, y + z) = f(x, y) + \phi(x, y, z)[z]$ si avrebbe $f(x_h, b_h) = f(x_h, a_h) + \phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h]$ e quindi $\phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h] = 0$. Osservato che $\phi(0,0,0)$ è l'identità su $\mathbb{R}^n$ e passando al limite in una sottosuccessione per la quale $b_h - a_h/\|b_h - a_h\|$ converge si ottiene una contraddizione.

Si osservi ora che per ϵ piccolo , $D_\epsilon \subset X$ è un dominio connesso a frontiera liscia (si utilizzi ad esempio il lemma di Morse). Resta qindi da dimostrare che se ϵ è piccolo , per ogni $x \in D_\epsilon$ il dominio connesso a frontiera liscia $\pi_x(D_\epsilon)$ in $T(X)_x$ ha segnatura $(n-1, 0, 0)$ in ogni punto del bordo.

Resta quindi da verificare la condizione sugli hessiani. Una equazione di definizione per il bordo di Ω_ϵ su X è data dalla funzione $\|x - x_0\|^2$. Verifichiamo che essa in tutti i punti di Ω_ϵ e su tutto lo spazio tangente (e non solo su $T(\partial\Omega)$ come già basterebbe ai nostri fini) è definita positiva. Infatti, siccome il fatto di avere hessiano definito positivo è invariante per cambiamenti affini di coordinate, possiamo leggere $T(X)_y$ per proiezione ortogonale su $H = T(X)_{x_0}$. Si ottiene così una funzione $\phi(x, y)$ definita in un intorno $U \times V$ di $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = H \times H$ che per $y \in V$ rappresenta (a meno di una costante $-\epsilon$) una equazione per il dominio D_ϵ "letto" su $T(X)_y$. Siccome f_0 ha hessiano definito positivo, ne segue che anche le f_y per y piccolo hanno hessiano positivo (su qualche intorno compatto di 0 in X) e ciò conclude la dimostrazione.

Descrizione formale del gruppo fondamentale

Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto fissato dello spazio topologico X.

Un *cammino formale* è una successione $i_0, \cdots, i_r$ di elementi di I tali che $U_{i_h} \cap U_{i_h+1}$ sia non vuoto per $h = 0, \cdots, r-1$. Diremo che tale cammino ha *inizio* in i_0 e *termine* in i_r. Si possono comporre in modo ovvio due cammini se il secondo inizia ove termina il primo . Se $\gamma_1 = (i_0, \cdots, i_r)$ è un cammino formale e $i \in I$ è tale che $U_{i_s} \cap U_i \cap U_{i_{s+1}}$ sia non vuoto allora il cammino $\gamma_2 = (i_0, \cdots, i_s, i, i_{s+1}, \cdots, i_r)$ è detto ottenuto da γ_1 per *espansione elementare* ; diremo anche che γ_1 è ottenuto da γ_2 per *contrazione elementare.* Due cammini sono *equivalenti* se si può passare dall' uno all'altro con un numero finito di espansioni e contrazioni elementari. Evidentemente due cammini equivalenti hanno stesso inizio e termine. E' facile verificare che le classi di equivalenza di cammini chiusi in i_0 (ossia cammini con inizio e termine in i_0) formano un gruppo che sarà detto gruppo formale di $\mathcal{U}$ e sarà indicato col simbolo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$.

Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia un buon ricoprimento dello spazio topologico connesso X. Fissiamo per ogni $i \in I$ un $x_i \in U_i$. Siano fissati inoltre cammini continui $\gamma_{i,j}$ da x_i a x_j in $U_i \cup U_j$ per ogni coppia $i, j \in I$ per cui $U_i \cap U_j$ sia non vuoto.

Costruiamo un omomorfismo $\phi : \Pi(\mathcal{U}, i_0) \to \pi_1(X, x_{i_0})$ associando ad un cammino formale $(i_0, \cdots, i_r, i_0)$ la classe di omotopia di $\gamma_{i_0,i_1} * \gamma_{i_1,i_2} * \cdots * \gamma_{i_r,i_0}$. Essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento , si verifica facilmente che ϕ è un omomorfismo ben definito indipendentemente dalle scelte fatte (a parte il punto base). Con un pò di lavoro analogo a quello richiesto per dimostrare il teorema di Van Kampen , si dimostra inoltre che ϕ è un isomorfismo .
Nota : si possono costruire generatori di $\pi_1(X, x_{i_0})$ fissando cammini continui γ_i da x_{i_0} a x_i in X . Allora i cammini $\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_i * \gamma_{i,j} * \gamma_j^{-1}$ per $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto , costituiscono un sistema di generatori per il gruppo fondamentale di X. Col teorema di Van Kampen si può anche dimostrare che una presentazione di π_1 in tali generatori è data dalle relazioni $\bar{\gamma}_{ij} * \bar{\gamma}_{jk} * \bar{\gamma}_{ki} = 1$ per ogni i, j, k tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Torniamo ora alla costruzione di equazioni per ipersuperfici in X. Si aveva la seguente situazione :
1. è dato un ricoprimento buono $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di una varietà X
2.sono assegnate costanti $\epsilon_{i,j} \in \{+1, -1\}$ per $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto
3.per $i, j, k \in I$ tali che $U_i \cap U_j \cap U_k$ sia non vuoto, si ha la relazione $\epsilon_{i,j} \cdot \epsilon_{j,k} = \epsilon_{i,k}$
Vogliamo sapere se :
4. esistono costanti $\epsilon_i \in I$ tali che per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto si abbia $\epsilon_{i,j} = \epsilon_i / \epsilon_j (= \epsilon_i \cdot \epsilon_j$ perchè tali costanti sono di periodo due).

Siano quindi assegnate costanti come in 1.—3. che indicheremo in blocco col simbolo ω. Per ogni cammino formale $\sigma = (i_1, \cdots, i_r)$ poniamo :

$$\int_\sigma \omega = \epsilon_{i_1,i_2} \cdot \epsilon_{i_2,i_3} \cdots \epsilon_{i_{r-1},i_r}$$

Le relazioni 3. di sopra assicurano che tale "integrale" ha lo stesso valore su cammini equivalenti. Definisce in particolare una applicazione

$$\nu : \Pi(\mathcal{U}, x_{i_0}) \to \{+1, -1\}$$

che è un omomorfismo di gruppi. Supponiamo che tale omomorfismo sia nullo. Ne segue che per ogni $i \in I$ possiamo definire una costante ϵ_i "integrando" lungo un cammino qualsiasi da i_0 ad i ; tali costanti verificheranno la condizione 4. , cosicchè l'ipersuperficie da cui eravamo partiti ha una equazione.

$1 \Longrightarrow 2$ (del teorema 22). (Non nel programma di esame) Si deve dimostrare che se $\pi_1(X, x_0)$ ha omomorfismi non banali a valori in $\mathbb{R}$, allora esiste in X qualche ipersuperficie chiusa che non possiede equazioni locali. Sia $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ un omomorfismo. Identifichiamo per $x \in U_i \cap U_j$ e $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ il punto $(x, \lambda_i) \in U_i \times \mathbb{R}$ con $(x, \sigma(\bar{\gamma}_{ij}) \cdot \lambda_j) \in U_j \times \mathbb{R}$. Si ottiene così un fibrato vettoriale di rango uno su X. Sia s una sezione di tale tale fibrato trasversale alla sezione nulla; dal teorema di divisione locale si ottiene che il luogo di zeri Y di s non può avere una equazione globale se σ non è banale.