Geometria poliedrale **(F.Lazzeri; Pisa, aprile 1999)**

Introduzione Che cosa è la Geometria? Il significato letterale (*misura della terra*) indica uno dei motivi pratici originari dello studio delle figure piane; altrettanto importanti nello stimolare i primi studi di Geometria devono essere stati i problemi sorti durante i lavori di costruzione di insediamenti umani, fortificazioni di villaggi, drenaggio di terreni, tutte attività che richiedono non solo di misurare, ma spesso piuttosto di descrivere e mettere in relazione nel modo più semplice possibile le svariate forme complesse in cui la natura si esprime. Più che scienza che insegna a misurare la terra (o le aree) tenterei quindi una definizione della Geometria come un linguaggio (matematico, ossia rigidamente strutturato) atto a descrivere (e studiare) le forme.Ma invece che cercare di proporre una definizione rigida di cosa si intende per Geometria, credo sia più utile fornire qualche esempio di inizio di riflessione, lasciando che poi ognuno si costruisca una propria idea di cosa sia (e quindi forse anche di cosa debba essere) questa scienza.

Si osservi dapprima che è possibile, agitando per aria per alcuni istanti gli indici delle mani in modo opportuno come se stessi disegnando sopra una lastra di vetro tra me e voi, indurvi a credere che io stia rappresentando una casetta col fumo uscente dal comignolo del tipo che io e sicuramente anche voi (e spero bene anche i bambini di oggi, magari sostituendo il comignolo con l'antenna della televisione) abbiamo disegnato da piccoli con le matite colorate. E' probabile che sia la prima volta che assistete a questo tentativo di comunicazione; eppure avete capito. Evidentemente ciò è potuto accadere perché non solo voi avevate già la conoscenza dell'oggetto che intendevo rappresentare (immaginate cosa avrebbe potuto capire qualcuno che fosse vissuto solo in città fatte di grattacieli squadrati senza aver mai neppure sentito parlare di altri tipi di ricoveri per umani), ma anche l'uso di rappresentarlo col disegno infantile a cui alludevo col mio gesticolare. Cosa c'entra la Geometria? beh, si ha una forma astratta, e si ha un modo convenzionale di rappresentarla: tutte e due queste cose (creazione di un concetto figurativo astratto e fissazione di un modo convenzionale per indicarlo) rappresentano l'essenza del fare geometria.

Riflettiamo ancora sulle forme presenti del mondo che ci circonda. Quasi tutto ciò che è modellato dall'uomo al contrario di quanto troviamo in natura, ha forme semplici, costituite da pezzi di retta o cerchi, ellissi ed altre curve elementari a differenza di quelle forme cosiddette naturali che ci appaiono come forgiate a caso, ma solo perché non siamo consapevoli (o comunque interessati) dei criteri organizzativi che le governano: si confrontino un muretto di mattoni o una cancellata di ferro con una siepe di rovi, soluzioni alternative per la recinzione di un giardino. Verrebbe in mente di affermare che la siepe si è formata in assenza di *regole* o *piani organizzativi* ma in realtà non è affatto così ; un cultore di ecologia e psicologia ci spiegherebbe forse che pensiamo così perchè siamo convinti a livello inconscio che le *regole* che hanno soprainteso alla formazione della siepe sono troppo complesse per essere da noi descritte ed eventualmente riutilizzate nelle nostre attività.

In effetti i manufatti umani sono organizzati globalmente secondo schemi che ci appaiono complessi ma che sono in realtà elementari in confronto agli schemi organizzativi presenti in natura: si pensi al progetto di costruzione di una casa che specifichi anche nei minimi dettagli il posizionamento di mattoni, collegamenti di impianti (idraulici, elettrici,. . .) e cosa potrebbe essere l'analogo relativo alla costruzione ed al mantenimento in vita di un qualsiasi essere vivente, anche dei più semplici esistenti.

Tutto ciò indica che l'uomo per operare ha bisogno di approssimare la realtà che lo circonda con un approccio spesso grossolano, accumunando le varie entità in pochi concetti astratti semplici e perciò stesso facilmente comunicabili e gestibili. La Geometria è regina in questo modo di procedere, essendo la forgiatrice dei modi di codifica delle *forme* e dei *rapporti di contiguità* tra gli oggetti.

Voglio terminare questo sproloquio indicando un pericolo insito nei nostri modi di rappresentare la realtà: inviterei a riflettere su esempi recenti di evoluzione dei sistemi di comunicazione, come ad esempio quello dei cartoni animati, divenuti spesso estremamente semplificati e standardizzati. Non saremo alla fine indotti a credere che la realtà consista solo di quelle quattro cose, sempre meno diversificate, che abbiamo imparato a formalizzare?

Il linguaggio poliedrale

I Grafi. La trattazione dei grafi fatta nelle mie lezioni può essere ritrovata con poche varianti in "I grafi e le loro applicazioni" di Oystein Ore, edizioni Zanichelli. Il problema dei ponti di Könisberg o la ricerca di un itinerario (pag. 31 e 37) come varie altre problemematiche riguardanti collegamenti urbani o formazione di tornei così come questioni che possono a torto sembrare solo giuochi da settimana enigmistica come quello del traghettamento di un cavolo una pecora ed un lupo, possono essere formulati come problemi sui grafi, sfrondandoli di tutte le loro particolarità che li rendono sì importanti in un qualche contesto e di cui quindi interessa una soluzione, ma che non servono alla costruzione di questa, anzi spesso confondono la comprensione della vera natura del problema. A questo riguardo vorrei osservare che alcuni quesiti-acchiapparello di quelli che si fanno per passatempo, sono basati sul fatto che si forniscono non solo i parametri utili per la giusta risposta, ma anche altri del tutto inutili, che se ben enfatizzati attirano l'attenzione del solutore che è portato così a sbagliare. Ciò non succede mai nei problemi posti agli studenti: si considera addirittura *sbagliato* nella formulazione, un problema in cui i dati sono sovrabbondanti. Il risultato è, a mio modo di vedere, una falsificazione della realtà che può incidere negativamente nello sviluppo di un tipo di abilità fondamentale nei processi di astrattizzazione, che consiste appunto nell'imparare a isolare in una situazione concreta i soli dati utili alla soluzione di un qualche problema che ci siamo posti, sfrondandolo di tutte le particolarità inessenziali.

Nel libro citato si descrivono molti esempi in cui questo questo processo di traduzione in termini di grafi di problemi "concreti" porta a trovare una soluzione. Il problema dei ponti di Könisberg : traduzione in un problema riguardante un disegno geometrico. Altro problema: la pianificazione del traffico cittadino; si vuole che in ogni caso due punti qualsiasi siano congiungibili. Anche in questo caso si ha un problema su un disegno piano. Un problema che riguarda le superfici si ha invece se si cercano le curve di lunghezza minima su un poliedro: qui il disegno della superficie non è possibile o in ogni caso non è utile a risolvere il problema; d'altra parte anche nel caso precedente delle curve, la realizzazione concreta della curva che rappresenta i possibili percorsi, non è utilizzabile quasi mai. E' piuttosto la costruzione di algoritmi che porta alle soluzioni adeguate. Anche su cosa sia una soluzione di un problema c'è abbastanza da riflettere: si pensi all'informazione data dalla affermazione "la soluzione è $\sqrt{2}$ " : ciò è solo una abbreviazione per dire "un numero che al quadrato dà 2" e, se non corredata da ulteriori informazioni,come ad esempio che si tratta di un numero tra 1 e 2, non dà di per se alcuna informazione quantitativa sulla soluzione. Oppure : si capisce cosa vuol dire "quegli zoccoli costano 35.000 lire", ma non si capisce " quel piatto contiene 35.000 chicchi di riso". Quindi il numero 35.000 è noto o no? Una soluzione *adeguata* è spesso non l'indicazione di una rappresentazione simbolica, come ad esempio 35.000, ma un riferimento ad una situazione conosciuta: 35.000 lire è noto perché già utilizzato in diverse occasioni; nello stesso modo "comprendiamo quanto sia" una scodella di chicchi di riso, ma non "quanto sia" una scodella di monete da cento lire, ad esempio cosa ci si possa comprare.

Altri esempi in cui si possono utilizzare i grafi: in un torneo (di tennis, scacchi etc.), stabilire quali partite sono state giuocate. Si tratta di unire con un segmento i vertici (giuocatori o squadre) che hanno disputato la gara. Oppure su un insieme di persone un grafo può essere utilizzato per specificare quando due hanno un linguaggio comune. Od in un palazzo quando due stanze sono comunicanti. In tutti questi casi, il grafo può essere rappresentato da disegni molto diversi tra loro; la lunghezza del tratto congiungente due elementi non ha alcuna importanza: l'importante è solo se la connessione tra i due punti esiste o no. Quindi l'unica cosa che interessa è avere fissato un insieme di simboli che rappresentino i vertici del grafo (lettere, numeri, punti del piano o comunque gli elementi di un insieme (i nomi) e la lista di quali coppie di simboli siano da considerare congiunti. Si chiederà che ogni simbolo (vetrice) sia unito almeno ad un altro, per non avere punti isolati; ma ciò può essere ritenuto non necessario. In ogni caso questa od eventuali altre richieste dovranno essere chiaramente fissate prima di iniziare a discurere di questi enti: niente deve rimanere ambiguo nella precisazione di cosa si intende con un termine tecnico.

Le superficie. Abbiamo solo accennato alla necessità di fissare con definizioni tecniche precise cosa si intende matematicamente col termine di *grafo*. In effetti ciò può apparire inessenziale perché la situazione è "geometricamente evidente" di per se in ogni contesto concreto in cui viene esaminata. Ciò non è corretto per almeno due ragioni. Una prima è riferibile alla necessità in situazioni molto complesse, di utilizzare metodi di calcolo automatico: bisognerà in certri casi "dire" ad un elaboratore elettronico "chi è" il grafo e ciò presuppone una sua strutturazione combinatoria: ad esempio si può pensare un grafo come un insieme di *vertici*, da fornirsi con una "lista di dati" assieme ad una lista di "coppie di vertici", che precisa quali vertici sono congiunti. Un'altra ragione è che è più facile svolgere considerazioni teoriche su una struttura data analiticamente in termini insiemistici , piuttosto che su una espressa "sinteticamente" evocando oggetti geometrici come poligonali o simili. Quest'ultime in genere sono utilissime per "intuire" cosa possa essere vero, ossia per fare "congetture"; ma dopo questa parte euristica, le dimostrazioni e la fissazione di efficienti algoritmi espliciti risolutivi, si fanno in genere con argomenti astratti e logicamente ineccepibili basati sul minore numero possibile di ingredienti, il che presuppone appunto l'utilizzo di definizioni di tipo astratto, oramai tipiche della matematica moderna.

Comunque, se nello studio dei grafi si poteva cercare di lavorare anche in assenza di definizioni astratte, ciò diviene più difficile per lo studio delle superficie e lo sarà ancora di più per gli oggetti geometrici di dimensione tre o più che introdurremo nel seguito.

Una superficie sarà un oggetto (combinatorio) costituito non solo da vertici tra i quali sono stati tracciati alcuni spigoli di congiunzione, ma in cui sono fissati anche certi triangoli (per semplicità, si trattano solo superficie con facce triangolari escludendo rettangoli, pentagoni ecc. ; così si escludono superficie come il cubo, che però diverrà una superficie nel nostro senso se ogni quadrato che lo costituisce viene diviso in due triangoli tramite una diagonale. Nello stesso modo ogni "poliedro" con facce poligonali qualsiasi potrà essere "suddiviso" in un poliedro costituito solo da triangoli.

Precisamente una *superficie* è il dato di

1. un insieme finito V i cui elementi sono detti i *vertici*
2. una famiglia A di sottoinsiemi di cardinalità due di V, detti gli *spigoli*
3. una famiglia F di sottoinsiemi di cardinalità tre di V, detti le *facce*

Si richiede inoltre che questi dati soddisfino le seguenti proprietà:

a. se $\{i, j, k\} \in F$ allora $\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}$ sono elementi di S

b. ogni vertice appartiene ad almeno una faccia

c. ogni spigolo è sottoinsieme di esattamente due facce

Per formulare gli ultimi due assiomi, introduciamo le seguenti nozioni:

def. diremo che due vertici $v_1, v_2 \in V$ sono *contigui* se $v_1 = v_2$ o se $\{v_1, v_2\}$appartiene ad S; se essi sono distinti saranno detti adiacenti. Un *cammino* è una successione finita $(v_1, \ldots, v_r)$ di vertici in cui ognuno è contiguo col successivo; i vertici v_1 e v_2 saranno detti *punto iniziale* e *punto finale* del cammino. Richiediamo allora che i dati V, S, F soddisfino anche le due serguenti:

d. dati due qualsiasi vertici, esiste un cammino che inizia in uno di essi e finisce nell'altro

e. dati due qualsiasi vertici adiacenti ad un $v \in V$, esiste un cammino costituito tutto di vertici adiacenti a v che inizia in uno di essi e finisce nell'altro.

Commento. Si può cercare di farsi una ragione del perché si richiedono soddisfatte le proprietà a.-e. come segue. La a. dice che se è presente un triangolo devono essere presenti anche i lati di questo. La b. esclude l'esistenza di punti isolati e la c. precisa che da ogni spigolo partono due triangoli. La d. dice che la superficie è fatta di un pezzo solo ed infine la e. assicura che per ogni vertice, l'unione dei triangoli che lo contengono è "fatta" come un poligono piano (che può essere pensato regolare) il cui baricentro è stato unito a tutti i vertici.

Se si vuole "visualizzare" la superficie si devono immaginare i punti di V congiunti a due a due secondo lo schema dato dalla "lista" S ed in cui abbiamo aggiunto anche dei triangoli come specificato dalla lista F. Questa superficie sarà così immaginata nello spazio; ma tale rappresentazione può essere talvolta impossibile proprio per motivi combinatori. Ciò può essere compreso meglio nel caso più semplice dei grafi: non tutti i grafi sono planari; ad esempio il grafo completo su 5 vertici (ossia 5 punti congiunti a due a due in tutti i modi possibili) non può essere realizzato nel piano. Esso può comunque essere "visto" nello spazio. Nel caso di superficie astrattamente definite come sopra, anche lo spazio ordinario può essere insufficiente come nel caso seguente: si parta dal nastro di Moebius che è un rettangolo in cui due lati opposti sono incollati tra loro in senso inverso a quello in cui si otterrebbe un cilindro e si incolli ad esso una superficie poligonale con tanti lati quanti sono quelli del bordo della realizzazione del nastro. Ad esempio se si parte da un rettangolo orizzontale diviso in tre rettangoli adiacenti da segmenti verticali e si incolla il lato di sinistra con quello di destra invertito (e si divide ognuno dei tre rettangoli in due triangoli con una diagonale) si ottiene un "bordo" costituito da una curva di sei lati; si può aggiungere a questa un esagono (diviso in tre triangoli da due diagonali) e si ottiene una superficie nel senso sopra definito che viene detta *piano proiettivo*. Si può dimostrare (in modo tutt'altro che banale) che essa non è realizzabile concretamente con una superficie dello spazio ordinario.

La classificazione delle superficie

Data una superficie X costituita da v vertici, s spigoli e f facce, il numero $\chi = \chi(X) = v - s + f$ viene chiamato *caratteristica* di Eulero-Poincaré di X. Una *curva poligonale semplice* in una superficie X è un sottografo isomorfo ad un poligono.

In modo più o meno completo sono state descritte dimostrazioni dei seguenti :

Teorema 1 *Per ogni superficie X si ha $\chi(X) \leq 2$*

Teorema 2 *Si ha $\chi(X) = 2$ se e solo se X è "omeomorfa alla sfera" nel senso che si possono ordinare le facce $F_1, \dots, F_r$ di X in modo tale che per ogni $t = 2, \dots, r-1$ la faccia F_t intersechi l'unione delle prime $t-1$ in un suo lato o nell'unione di due suoi lati*

Teorema 3 *Se $\chi(X) < 2$, allora esiste in X una curva semplice che non sconnette la superficie. Tagliando lungo tale curva si ottiene una superficie con uno o due bordi a seconda che X cambi o no l'orientazione lungo tale curva. Nel primo caso si costruisce una superficie $\tilde{X}$ aggiungendo la superficie di un poligono e si ha $\chi(\tilde{X}) = \chi(X) + 1$. Nel secondo si aggiungono due tali superficie poligonali e la $\tilde{X}$ che si ottiene verifica $\chi(\tilde{X}) = \chi(X) + 2$.*

La congettura di Poincaré

Si è infine discusso il caso di dimensione tre: oltre vertici spigoli e facce (=triangoli) si suppongono dati anche *tetraedri* ossia quaterne di vertici ognuna indicante una "piramide a base triangolare" il tutto verificante assiomi analoghi a quelli per le superficie. Il problema che si pone è quello di determinare numeri associati ad una tale X del tipo della caratteristica di Eulero-Poincaré (che nel caso delle superficie individua perfettamente la forma topologica, ma che nel caso tri-dimensionale non dice praticamente niente) che individuino la "forma" di X. La congettura di Poincaré, chiede se vale l'analogo del teorema 2 nel caso che ogni cammino chiuso di X possa essere deformato ad un cammino costante con operazioni di espansione e contrazione elementari. Questo problema attende una risposta da circa cento anni.