Inversione di Integrali

(F.Lazzeri; Pisa, ottobre 1998)

La serie $\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ e definisce quindi una funzione $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$; lo studio elementare di tale funzione è svolto nelle prime pagine di [R] ove in particolare si trova che exp è un omomorfismo (differenziabile) surgettivo del gruppo additivo dei numeri complessi nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli. Il nucleo di exp è un sottogruppo ciclico infinito il cui generatore di parte immaginaria positiva è indicato con la notazione $2\pi i$. E' ben noto poi elementarmente che il logaritmo reale può essere introdotto come una primitiva in $]0, +\infty[$ di dx/x (quella che vale) nel punto 1); tale metodo diviene ambiguo nel caso complesso per la polidromia del logaritmo complesso. Mostreremo ora come il classico metodo di inversione degli integrali, come descritto ad esempio in [L] , permette di introdurre "elementarmente" la funzione esponenziale come inversa dell'integrale della forma dz/z.

L'esposizione è elementare in un senso suo proprio: sono richieste la conoscenza delle proprietà elementari dei rivestimenti e delle nozioni base della teoria delle funzioni olomorfe; la riteniamo elementare perché, come mostrato nel seguito, con gli stessi ragionamenti si ottengono risultati molto meno elementari, come la costruzione di funzioni meromorfe doppiamente periodiche, o il riconoscimento di alcune curve algebriche come isomorfe alla sfera di Riemann o ad un quoziente di $\mathbb{C}$ per un sottogruppo discreto di rango due.

Nel primo paragrafo si costruisce la funzione esponenziale secondo il metodo ora accennato. Nel secondo si trattano sostanzialmente i classici integrali del tipo $dz/\sqrt{p(x)}$ ove P è un polinomio di grado tre o quattro senza radici multiple; viene descritta la superficie di Riemann associata a polinomi anche più generali assieme ad alcuni teoremi che assicurano che quelle ottenute in tal modo sono tutti e soli i domini di Riemann su $\mathbb{C}$ che sono finitamente compattificabili.

Nell'ultimo paragrafo infine si danno due altri teoremi di riconoscimento per superficie di Riemann compatte su cui si abbia un differenziale meromorfo con certe specifiche proprietà, sempre nello stesso spirito, senza alcun ricorso a teoremi di esistenza tipo Riemann-Roch o consimili.

1. Introduzione dell'esponenziale Consideriamo la $1-$forma olomorfa $\omega = dz/z$ su $\mathbb{C}^*$. Detto $\phi : (X, x_0) \to (\mathbb{C}^*, 1)$ il rivestimento universale, siano $\tilde{\omega} = \phi^*(\omega)$ e $f : X \to \mathbb{C}$ la primitiva di $\tilde{\omega}$ con $f(x_0) = 0$. Tale f è un rivestimento e quindi un biolomorfismo. Infatti f è un omeomorfismo locale perché il suo differenziale è in ogni punto non nullo. Se $h : \Omega \to \mathbb{C}$ è una primitiva di ω su un aperto di $\mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$, allora $\bar{h}(z) = h(\lambda z)$ è una primitiva di ω su $\bar{\Omega} = (1/\lambda) \cdot \Omega$; da ciò si deduce nel modo solito che per f vale il sollevamento dei cammini e quindi è effettivamente un rivestimento. Quindi il rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$ può essere identificato con $\mathbb{C}$ e descritto come l'inversione dell'integrale $\int dz/z$.

Ne risulta che $\mathbb{C}^*$ è descrivibile come quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo Γ dei periodi di ω; questo deve essere un sottogruppo discreto e non può essere il gruppo nullo perché $\mathbb{C}^*$ non è omeomorfo a $\mathbb{C}$ (non è semplicemente connesso) e non può avere rango due perché $\mathbb{C}^*$ non è compatto. Quindi Γ ha rango uno.

Verifichiamo che Γ è fatta di numeri puramente immaginari. Infatti:

$$\omega = dz/z = (\bar{z} \cdot dz)/(\bar{z} \cdot z) = \alpha + i\beta$$

ove $\alpha = (xdx + ydy)/(x^2 + y^2)$ e $\beta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ sono $1-$forme chiuse reali su $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una primitiva di ω su $\mathbb{R}^+$ (essa esiste perché $\mathbb{R}^+$ è semplicemente connesso), allora $(1/2)F(x^2 + y^2)$ è una primitiva di α che quindi è esatta. Ne segue che i periodi di ω sono i periodi di β moltiplicati per l'unità immaginaria. Risulta così univocamente determinato un generatore T di Γ a parte immaginaria positiva e si può introdurre la costante reale positiva π ponendo $T = 2\pi i$.

Evidentemente questo modo di introdurre la funzione esponenziale è concettualmente molto più complicato dell'altro. Inoltre lo schema sin qui descritto introduce una struttura di gruppo su $\mathbb{C}^*$ (come quoziente di $\mathbb{C}$) ma non precisa che questa coincide proprio con quella già esistente (la moltiplicazione tra numeri complessi non nulli). Questo metodo ha comunque alcuni pregi. Anzitutto non utilizza alcun tipo di calcolo; inoltre assicura che su $\mathbb{C}^*$ c'è una struttura di gruppo, quella di quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo dei periodi della forma ω, indipendentemente dal fatto che già una tale struttura (il prodotto tra numeri complessi) fosse presente.

Risultati analoghi si possono ottenere con gli stessi metodi in situazioni più complicate come quella che descriveremo ora.

2. Inversione di alcuni integrali algebrici Sia $F(x, y)$ un polinomio in due variabili che per ora supporremo a coefficienti reali e sia $P = (x_0, y_0)$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_y F(x_0, y_0) \neq 0$. Quindi il luogo Δ degli zeri di F è localmente in (x_0, y_0) il grafico di una funzione (analitica) $y = h(x)$. Consideriamo integrali del tipo:

$$\int_a^b \frac{R(x, h(x))}{S(x, h(x))}$$

ove R e S sono polinomi in due variabili con $S(x, h(x))$ non identicamente nullo. Come insieme di definizione di h si può prendere quello massimo ove è prolungabile la funzione (implicitamente definita) h passante per (x_0, y_0) (problematica dello studio del *campo di definizione*); se il punto (x_0, y_0) non viene indicato si ha l'indeterninazione di quale funzione si voglia integrare e su quali possibili intervalli. Ad esempio se $F(x, y) = y^2 - x$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$ si otterrà la funzione $h(x) = \sqrt{x}$ definita su $\mathbb{R}^+$ e si potrà integrare su qualsiasi intervallo della semiretta positiva. Si noti che fissando invece il punto $(1, -1)$ avremmo ottenuto $h(x) = -\sqrt{x}$. Nel caso di una F più complicata si avranno maggiori difficoltà nella descrizione delle possibili funzioni ottenibili per esplicitazione; inoltre non è chiaro se e come tali varie funzioni e relative primitive siano correlate tra loro.

Si può rimediare in parte a ciò considerando la "curva" X definita nel piano come luogo di zeri di F e la forma differenziale

$$\omega = \frac{R(x, y)}{S(x, y)} dx$$

o meglio la sua restrizione alla curva X (si suppone ovviamente che S non sia identicamente nulla su alcuna componente di X).

Risulterà proficuo estendere tutto ciò al caso complesso; ciò tra l'altro permetterà (nel caso che F sia irriducibile) di "connettere" i vari fogli in cui si spezzava il caso reale (si consideri ad esempio il caso $F(x,y) = y^2 - x(x^2-1)$ in cui la curva X si decompone in due rami apparentemente totalmente slegati tra loro; eppure i "calcoli" fatti per integrare su essi saranno sostanzialmente gli stessi).

Si ha infatti il seguente teorema di connessione:

Teorema 1 *Se $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ è irriducibile, allora $X = \{(x,y) \in \mathbb{C} : F(x,y) = 0$ $(D_x F(x,y), D_y(x,y)) \neq (0,0)\}$ è connesso ed è quindi una superficie di Riemann*

Tale X non sarà compatta. Risulterà utile aggiungere un insieme finito di punti in modo da ottenere una superficie di Riemann compatta come precisato dal prossimo teorema: diremo che una superficie di Riemann X è *compattificabile* se è biolomorfa ad un aperto di una superficie di Riemann compatta $\tilde{X}$; diremo che è finitamente compattificabile se ciò è possibile con $\tilde{X} - X$ finito.

Teorema 2 *Se la superficie di Riemann è finitamente compattificabile, ogni due sue compattificazioni sono biolomorfe per un biolomorfismo che induce l'identità su X). La superficie di Riemann determinata (come nel precedente teorema) da un polinomio irriducibile è finitamente compattificabile*

Si potrebbe dimostrare che con questa procedura (compattificazione di superficie associate a polinomi di due variabili) si ottengono tutte le superficie di Riemann compatte, ma ciò richiederebbe l'utilizzo di techiche di Analisi abbastanza approfondite (vedi ad esempio [F]). Ci accontenteremo di dimostrare un risultato più debole ottenibile però con metodi geometrici di tipo elementare.

Prolungamento di funzioni olomorfe. Introduciamo una topologia nello spazio prodotto $\mathcal{O} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}\{\{T\}\}$ (i cui elementi sono detti *elementi di funzione analitica* secondo Weierstrass) fissando come base di aperti gli insiemi del tipo seguente:

dati $(z_0, S(T)) \in \mathcal{O}$ ed $\epsilon > 0$ sia B l'insieme degli $(z_1, S_1) \in \mathcal{O}$ tali che $|z_1 - z_0| < \epsilon$ e del raggio di convergenza di $S(T)$ e S_1 è lo sviluppo della somma di S nel punto z_1. La proiezione sul primo fattore di $\mathcal{O}$ su $\mathbb{C}$ è un omeomorfismo locale che introduce su $\mathcal{O}$ una struttura di varietà complessa di dimensione uno che viene detta *fascio delle funzioni olomorfe* su $\mathbb{C}$. La componente connessa di un elemento di funzione $(z_0, S(T))$ di $\mathcal{O}$ è così una superficie di Riemann che viene detta ottenuta per prolungamento dell'elemento di funzione dato; un tale oggetto viene detto un *dominio di Riemann su* $\mathbb{C}$.

Teorema 3 *Un elemento di funzione analitica $(z_0, S(T))$ induce per prolungamento analitico una superficie di Riemann finitamente compattificabile se e solo se esiste un polinomio irriducibile $F(x,y)$ tale che $F(T, S(T)) \equiv 0$ in $\mathbb{C}\{\{T\}\}$(o equivalentemente in $\mathbb{C}[[T]]$ oppure $F(z, S(z)) = 0$ per ogni z sufficientemente piccolo)*

Questo risultato segue facilmente dal seguente:

Teorema 4 *Il corpo delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta, è un corpo di funzioni algebriche in una variabile (ossia è una estensione finitamente generata di trascendenza uno su $\mathbb{C}$)*

Funzioni analitiche generalizzate. Il prolungamento sopra definito di un elemento di funzione analitica fornisce una superficie di Riemann X (una componente connessa di $\mathcal{O}$), una funzione $z : X \to \mathbb{C}$ (la proiezione sul primo fattore di $\mathcal{O}$) che è priva di punti critici e una funzione olomorfa $f : X \to \mathbb{C}$ (quella i cui sviluppi in serie costituiscono la seconda componente in $\mathcal{O}$). Generalizziamo ulteriormente questa nozione considerando le terne (X, z, f) ove X è una superficie di Riemann, $z : X \to P$ è una applicazione olomorfa non costante su una superficie di Riemann P e $f : X \to \mathbb{P}^1$ è una funzione meromorfa. Tale oggetto sarà detta una *funzione analitica polidroma*; chiameremo P il dominio della funzione e $\mathbb{P}^1$ sarà il codominio ed abbrevieremo l'indicazione della funzione con la sola lettera f.

Alcuni esempi. Esaminiamo ora un caso particolare di integrale del tipo sopra introdotto. Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado n avente radici distinte, ossia tale che per $x \in \mathbb{C}$ se $f(x) = 0$ si ha $f'(x) \neq 0$ e studiamo l'integrale della forma $\omega = dx/\sqrt{f(x)}$.

Si verifica intanto che il luogo di zeri X di $F(x, y) = y^2 - f(x)$ in $\mathbb{C}^2$ è una varietà complessa di dimensione uno (perché in ogni punto di X almeno una delle derivate parziali di F è diversa da zero). Le coordinate x , y su $\mathbb{C}^2$ danno per restrizione due funzioni olomorfe su X verificanti la relazione $y^2 - f(x) = 0$.

Si ha quindi la relazione $2u \cdot dy = f'(x) \cdot dx$ (relazione tra $1-$forme su X) che può essere scritta $dx/y = 2dy/f'(x)$ il cui primo membro è la $1-$ forma ω che vogliamo studiare; il fatto che essa si possa scrivere anche come nel secondo membro, assicura che ω è olomorfa mai nulla su tutto X (ossia all'intorno di ogni punto di X, scelta una coordinata locale t si ha $\omega = h(t)dt$ con h olomorfa e $h(0) \neq 0$)

Compattificazione di X. Fuori di un disco D che contenga tutte le radici di f, si ha una applicazione olomorfa localmente invertibile di grado due di $X - \phi^{-1}(D)$ in $\mathbb{C} - D$ (ϕ è la restrizione ad X della proiezione sull'asse x). Allora o $X - \phi^{-1}(D)$ è unione di due componenti connesse e ϕ induce un biolomorfismo tra ognuna di esse e $\mathbb{C} - D$ oppure $\mathbb{C} - D$ è connesso e allora $X - \phi^{-1}(D) \to \mathbb{C} - D$ è un rivestimento di grado due; in questo caso essendo $\mathbb{C} - D$ biolomorfo a $U = \{0 < |z| < 1\}$, tale rivestimento è isomorfo a $z \mapsto z^2$ di U in U, perché U possiede un solo rivestimento di grado due. Saremo nel primo caso se n è pari ed allora X sarà compattificabile con 2 punti; altrimenti n è dispari e si compattifica con un solo punto.

Caso $n = 3$ Allora x , $y : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$ sono olomorfe di gradi rispettivamente due e tre. Quindi nel punto p_0 aggiunto ad X per compattificarla, x , y hanno poli di ordine due e tre. Ossia se t è una coordinata locale olomorfa di centro p_0, si avrà $x(t) = t^{-2} \cdot a(t)$, $y(t) = t^{-3} \cdot b(t)$ con a , b olomorfe (per t piccolo) e non nulle in zero. Con facile calcolo si verifica quindi che $\omega = dx/y$ è olomorfa non nulla anche nel punto p_0.

A questo punto ragionando come in un teorema precedente in cui si avevano $1-$forme $\omega_1, \ldots, \omega_n$ su una varietà differenziabile che inducevano in ogni punto una base del duale dello spazio tangente (si integra la rimontata di ω sul rivestimento universale, si scopre che questo è $\mathbb{C}$ ...) si trova che il sottogruppo Γ di $\mathbb{C}$ formato dagli $\{\int_\gamma \omega$ per $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})\}$, è discreto di rango due ed esiste un biolomorfismo $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}/\Gamma$ tale che $\omega = F^*(dt)$.

La dipendenza algebrica di funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta ha una dimostrazione che utilizza le stesse tecniche del teorema di connessione. Descriveremo ora le linee essenziali di tali dimostrazioni.

Sia $f : X \to \mathbb{P}^1$ una funzione meromorfa non costante su una superficie di Riemann compatta X. Essa sarà una applicazione di un certo grado n; precisamente esisterà Δ finito in $\mathbb{P}^1$ tale che $f : X - f^{-1}(\Delta) \to \mathbb{P}^1 - \Delta$ sia un rivestimento di grado n.

Mostreremo che ogni altra funzione meromorfa $g : X \to \mathbb{P}^1$ è radice di un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}(f)$.

Infatti supponiamo che g sia finita in tutti i punti che non si proiettano in Δ (altrimenti si ingrandisca un pò Δ); fissiamo per ogni $x \in \mathbb{P}^1 - \Delta$ una numerazione $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ dei punti di $f^{-1}(x)$ (non richiediamo per le α_i alcuna condizione di regolarità). L'espressione :

$$(W - g(\alpha_1(x)) \cdot \ldots \cdot (W - g(\alpha_n(x)) = G(W, x)$$

è un polinomio monico di grado n in W a coefficienti funzioni (a priori discontinue) di x. Dimostreremo ora che i coefficienti di G sono funzioni meromorfe su $\mathbb{P}^1$, quindi rapporti tra polinomi in x e ciò concluderà la dimostrazione

Anzitutto tali coefficienti sono olomorfi fuori di Δ; infatti siccome essi non dipendono da come sono state scelte le α_i, attorno ad ogni punto di $\mathbb{P}^1 - \Delta$ possiamo supporre che le α_i siano inverse locali olomorfe di f.

Si controlla poi che tali coefficienti hanno nei punti di Δ singolarità eliminabili o polari: infatti essi avranno limite zero se moltiplicati per una opportuna potenza di una coordinata locale.

Altri esempi Sia X una superficie di Riemann compatta e sia ω una forma differenziale meromorfa su essa. Supponiamo che ω abbia un solo polo x_0; necessariamente il suo residuo in tale punto sarà nullo e quindi essa sarà localmente integrabile in un intorno. Supponiamo ora che ω non abbia zeri su X. Siano $X' = X - \{0\}$, H il nucleo dell'omomorfismo di $\pi_1(X')$ in C ottenuto integrando sui laccetti di X' la forma ω e $\sigma : \tilde{X} \to X'$ il rivestimento associato ad H. Allora $\tilde{X}$ è estendibile ad una $\bar{X}$ sulla quale σ si estende ad un rivestimento ramificato su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e quindi σ è un rivestimento di $\mathbb{C}$. Essendo $\mathbb{C}$ semplicemente connesso σ è quindi un biolomorfismo. Ne segue che esiste un biolomorfismo tra la superficie di Riemann di partenza e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che trasforma ω in dz.

Un altro caso trattabile elementarmente è il seguente: sia ω un differenziale meromorfo su una superficie di Riemann compatta X privo di zeri e con due poli d'ordine uno. Localmente tale forma sarà quindi di "tipo" logaritmico; ragionando come sopra sul rivestimento universale di X meno i due poli, l'integrale di ω dà un rivestimento di $\mathbb{C}$. Si arriva così a riconoscere l'esistenza di un biolomorfismo tra X e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che trasforma ω in dz/z.

[*F*] **H.M.Farkas,I.Kra** *Riemann Surfaces* Springer-Verlag 1992

[*L*] **F.Lazzeri** *Periodi simultanei* http:www.dm.unipi.it/gauss-pages/lazzeri

[*R*] **W.Rudin** *Real and Complex Analysis* McGraw-Hill 1966