Topologia Algebrica (F.lazzeri, A.A 2000/1)

Notazioni e richiami di omologia

Nel seguito ogni anello R sarà, salvo avviso contrario, supposto commutativo con identità distinta da 0 ed ogni $R-$modulo sarà unitario. In particolare la nozione di gruppo abeliano coinciderà con quella di $\mathbb{Z}-$modulo.

Sia R un anello fissato. Un *complesso* (su R) è una coppia (X, d) ove X è un $R-$modulo e $d : X \to X$ è un endomorfismo tale che $d \circ d = 0$ che verrà detto *operatore di bordo.* I *cicli* di X sono gli elementi del nucleo $Z(X)$ di d; i *bordi* di X sono gli elementi dell'immagine $B(X)$ di d e l'$\mathbb{R}-$modulo $H(X) = Z(X)/B(X)$ viene detto l'*omologia* del complesso.

Spesso X sarà *graduato*: ossia è fissata una decomposizione $X = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} X_p$. In tal caso d sarà detto *omogeneo di grado* r se $d(X_p) \subset X_{p+r}$; se $r = -1$ diremo che X è un *complesso di catene*, se $r = 1$ parleremo di *complesso di cocatene.*
In tali casi si hanno graduazioni indotte in modo ovvio sugli Z , B ed H i cui fattori verranno indicati con indici in basso nel caso di complessi di catene e con indici in alto per i complessi di cocatene.

Diremo *complesso duale* di un complesso (X, d) il complesso (X^*, d^*) ove $X^* = \mathrm{Hom}(X, R)$ e d^* è definito da $d^*(h) = h \circ d$ (ossia d^* è la trasposta di d).
L'omologia $H(X^*)$ di X^* verrà detta *coomologia* di X e verrà indicata anche con la notazione $H^*(X)$.

Attenzione Se, come quasi sempre, $X = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} X_p$ è graduato, come complesso duale considereremo la somma diretta $X^* = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(X_p, R)$; essa coincide con $\mathrm{Hom}(X, R)$ solo in alcuni casi: ad esempio se è $X_p = (0)$ salvo al più per un numero finito di $p \in \mathbb{Z}$ (ciò è dovuto alla differenza tra somme dirette e prodotti diretti: il duale di una somma è un prodotto).

L'applicazione bilineare $X^* \times X \ni (h, x) \to h(x) \in R$ induce una applicazione bilineare:

$$H^*(X) \times H(X) \to R$$

Nel caso X sia un complesso di catene, l'applicazione precedente induce per ogni $p \in \mathbb{Z}$ una applicazione bilineare:

$$H^p(X^*) \times H_p(X) \to R$$

Un *morfismo* tra complessi $\phi : (X, d) \to (X', d')$ è un omomorfismo $\phi : X \to X'$ di $R-$moduli che commuta con gli operatori di bordo: ossia tale che $\phi \circ d = d \circ \phi$. Ogni tale morfismo induce un omomorfismo $H(X) \to H(X')$ che verrà indicato con $H(\phi)$ o più spesso con ϕ_*.

Si verifica facilmente che H diviene in tal modo un *funtore* della categoria dei complesi su R nella categoria degli $R-$moduli. Ciò significa che se $\phi : X \to X'$ e $\psi : X' \to X''$ sono morfismi di complessi, allora $H(\psi \circ \phi) = H(\psi) \circ H(\phi)$ e che se id è l'identi tà su X, allora $H(id)$ è l'identità su $H(X)$.

Una costruzione fondamentale della teoria è la seguente; siano $\alpha : X' \to X$ e $\beta : X \to X''$ morfismi di complessi tali che:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

sia una successione esatta (detta *successione esatta corta*). Allora la successione:

$$H(X') \to H(X) \to H(X'')$$

è esatta ma in generale non lo è la :

$$0 \to H(X') \to H(X) \to H(X'') \to 0$$

Si costruisce comunque in modo "naturale" un omomorfismo
$\delta : H(X'') \to H(X')$ tale che la successione:

$$... \to H(X'') \to H(X') \to H(X) \to H(X'') \to H(X') \to ...$$

sia esatta; tale δ viene detto *operatore di congiunzione* e la successione ottenuta è detta *successione esatta lunga di omologia.* L'affermazione che δ è "naturale" può essere precisata considerando la categoria delle successioni esatte corte di complessi: δ è un "omomorfismo" (ossia quello che nel linguaggio delle categorie viene detto una *trasformazione naturale*) del funtore che ad ogni tale successione associa $H(X'')$ in quello che ad essa associa $H(X')$ e ciò è esprimibile in termini di commutatività dei diagrammi che si ottengono in tale situazione.

La costruzione di δ procede così : Sia $x'' \in X''$ un rappresentante di una classe $h'' \in H(X'')$; quindi $d(x'') = 0$. Essendo β surgettiva esiste $x \in X$ con $\beta(x) = x''$. Consideriamo $y = dx$; allora $\beta(y) = \beta d(x) = d\beta(x) = d(x'') = 0$ ed essendo $ker(\beta) = Im(\alpha)$ esiste $y' \in X'$ con $\alpha(y') = y$. Si verifica che $d(y') = 0$ e si definisce come $\delta(h)$ la classe determinata da y' in $H(X')$.

Che tale $\delta(h)$ non dipende dalle scelte fatte e che quindi dipende solo da h, che δ è un omomorfismo di $H(X'')$ in $H(X')$ e che la successione esatta lunga è effettivamente esatta, è dimostrabile con tediose ma banali argomentazioni di tipo lineare.

Se X', X, X'' sono graduati, α e β sono omogenei di grado zero e d ha grado -1 (risp. grado $+1$) si avrà:

$$\delta : H_p(X'') \to H_{p-1}(X') \qquad (risp. \quad \delta : H^p(X'') \to H^{p+1}(X'))$$

Ciò si deduce dalla costruzione sopra descritta la quale utilizza solo operatori di grado zero salvo una volta in cui interviene l'operatore di bordo.

Omologia simpliciale

Uno *schema simpliciale* è una coppia (I, K) ove I è un insieme i cui elementi sono detti i *vertici* e K è una famiglia di parti finite di I verificante le condizioni:

- $\{i\} \in K$ per ogni $i \in I$

- $s \in K$ e $t \subset s \Rightarrow t \in K$

Gli elementi di K sono detti i *simplessi* di K; diremo che $s \in K$ ha dimensione p se esso ha cardinalità $p + 1$. In particolare l'insieme vuoto è un simplesso (l'unico) di dimensione -1.

Un $p-$simplesso orientato è una $(p+1)-$upla $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$. Se R è un anello fissato, indichiamo con $S_p(K, R) = S_p(K)$ l'$R-$modulo libero sui $p-$simplessi di K. Per definire un omomorfismo $d : S_p(K) \to S_{p-1}(K)$ basterà specificare il suo valore sui $p-$simplessi orientati (perché essi ne costituiscono una base). Poniamo:

$$d(i_0, \ldots, i_p) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h (i_0, \ldots, \hat{i}_h, \ldots, i_p)$$

ove l'accento ˆ indica l'eliminazione dell'elemento su cui è posto.

Si verifica che $d \circ d = 0$; quindi $S(K) = \bigoplus_{p \geq -1} S_p(K)$ è un complesso di catene. La sua omologia $H(K) = \bigoplus H_p(K)$ è detta *omologia simpliciale augmentata* (o *ridotta*) di K; l'omologia "ordinaria" è ottenuta annullando in $S(K)$ la componente di grado -1.

Un *morfismo* $\phi : (I_1, K_1) \to (I_2, K_2)$ di schemi simpliciali è una applicazione $\phi : I_1 \to I_2$ tale che per ogni $s \in K_1$ si abbia $\phi(s) \in K_2$; gli schemi simpliciali costituiscono così una categoria.

Ad un tale morfismo associamo un omomorfismo $\phi_* : S(K_1) \to S(K_2)$ applicando un $p-$simplesso $s = (i_0, \ldots, i_p)$ di K_1 in $(\phi(i_0), \ldots \phi(i_p))$. Evidentemente tale ϕ_* commuta con gli operatori di bordo e si ha quindi un funtore dalla categoria degli schemi simpliciali in quella dei complessi di catene.

Indicheremo ancora con ϕ_* l'omomorfismo associato di $H(K_1)$ in $H(K_2)$.

Uno schema simpliciale (I_1, K_1) è un sottoschema di (I, K) se $K_1 \subset K$. In tal caso si ha una inclusione $S(K_1) \subset S(K)$; il quotiente $S(K, K_1) = S(K)/S(K_1)$ è detto il complesso delle *catene relative* di K modulo K_1 (si noti che un quoziente X/X_1 di complessi è ancora un complesso perché l'operatore di bordo di X passa al quoziente). Si ha così una successione esatta:

$$0 \to S(K_1) \to S(K) \to S(K, K_1) \to 0$$

dalla quale si ottiene la successione esatta lunga di omologia:

$$\ldots \to H_p(K_1) \to H_p(K) \to H_p(K, K_1) \to H_{p-1}(K_1) \to \ldots$$

Analogamente, posto $S^p(K) = \mathrm{Hom}(S^p(K), R)$ si ha un complesso di cocatene la cui omologia, detta *coomologia simpliciale* (ridotta) di K sarà indicata con:

$$H^*(K) = \bigoplus_{p \geq -1} H^p(K)$$

Se K_1 è un sottoschema di K, allora $S(K_1)$ è un fattore diretto di $S(K)$ e si ha quindi una surgezione $S^*(K) \to S^*(K_1)$ il cui nucleo $S^*(K, K_1)$ è detto complesso delle *cocatene relative* di K modulo K_1 e la cui omologia viene detta *coomologia simpliciale relativa* (di K modulo K_1). Dalla successione esatta:

$$0 \to S^*(K, K_1) \to S^*(K) \to S^*(K_1) \to 0$$

si ottiene la successione esatta lunga di coomologia:

$$\ldots \to H^p(K, K_1) \to H^p(K) \to H^p(K_1) \to H^{p+1}(K, K_1) \to \ldots$$

(si noti che se $K_1 = \emptyset$ si ha $H^p(K, K_1) = H^p(K)$). Si hanno applicazioni bilineari:

$$H^p(K, K_1) \times H_p(K, K_1)$$

che soddisfano ovvie relazioni di commutatività relative alle successioni esatte lunghe di omologia e coomologia. Ad esempio se $\alpha \in H^p(K)$ e $c \in H_p(K_1)$ dette α' l'immagine di α in $H^p(K_1)$ e c' l'immagine di c in $H_p(K)$ si ha $\alpha'(c) = \alpha(c')$; se $\alpha \in H^p(K_1)$ e $c \in H_{p+1}(K_1)$, dette α' l'immagine di α in $H^{p+1}(K, K_1)$ (tramite l'operatore di congiunzione δ in coomologia) e c' l'immagine di c in $H_p(K_1)$ (tramite l'operatore di congiunzione in omologia), si ha $\alpha'(c) = \alpha(c')$.

Si è visto che ad un morfismo ϕ dello schema simpliciale K nello schema K' corrisponde un morfismo $\phi_* : S(K) \to S(K')$; la sua trasposta è un morfismo $\phi^* : S^*(K') \to S^*(K)$: ne segue che la coomologia simpliciale è un funtore *contravariante* dalla categoria degli schemi simpliciali in quella degli $R-$moduli.

Si hanno inoltre formule del seguente tipo:
se $c \in H_p(K)$ e $\alpha \in H^p(K')$ allora $\alpha(\phi_*(c)) = \phi^*(\alpha)(c)$.

Catene simpliciali non degeneri

Anche se K è finito (ma non vuoto) i moduli $S_p(K)$ sono non nulli per ogni p : ad esempio per ogni vertice $i \in I$, si ottiene un $p-$simplesso orientato ripetendo i per $p + 1$ volte. Ciò limita l'utilizzo di metodi combinatori. Per superare questa difficoltà possiamo provare ad azzerare tutti i $p-$simplessi *degeneri*, ossia quelli in cui vi è qualche indice ripetuto. Per ottenere alla fine dei moduli di omologia isomorfi a quelli precedentemente definiti, occorrerà anche identificare un $p-$simplesso $(i_0, \ldots, i_p)$ con quello ottenuto applicando una permutazione pari e con l'opposto di quello ottenuto applicando una permutazione dispari. Si ottengono così degli $R-$moduli $S'_p(K)$ quozienti degli $S_p(K)$. Si verifica che l'operatore di bordo sugli $S_p(K)$ è compatibile con tali quozienti e si ottiene quindi un complesso di catene $S'(K)$ detto delle *catene non degeneri*.

Se $\phi : K_1 \to K_2$ è una applicazione simpliciale, l'omomorfismo ϕ_* di $S(K_1)$ in $S(K_2)$ è compatibile con i quozienti e si ottiene quindi che S' è un funtore dalla categoria degli schemi simpliciali in quella dei complessi di catene. Si ottengono così nuovi invarianti omologici degli schemi simpliciali che indicheremo con $H'(K)$. Il morfismo di proiezione $S(K) \to S'(K)$ induce una trasformazione (naturale tra funtori) $H(K) \to H'(K)$.

Teorema 1 *L'omomorfismo $H(K) \to H'(K)$ è un isomorfismo per ogni schema simpliciale K*

La dimostrazione sarà fatta in più passi, con due tipi di induzione.

Siano K_1 , K_2 due sottoschemi simpliciali di K tali che $K_1 \cup K_2 = K$ e sia $K_0 = K_1 \cap K_2$. Siano $\sigma_i : S(K_0) \to S(K_i)$ e $\tau_i : S(K_i) \to S(K)$ per $i = 1, 2$ gli omomorfismi indotti dalle inclusioni. Si ha una successione esatta:

$$0 \to S(K_0) \xrightarrow{\sigma} S(K_1) \oplus S(K_2) \xrightarrow{\tau} S(K) \to 0$$

ove $\sigma(c) = (\sigma_1(c), \sigma_2(c))$ e $\tau(c_1, c_2) = \tau_1(c_1) - \tau_2(c_2)$.
La successione esatta lunga associata a tale successione esatta corta è detta *successione di Mayer-Vietoris*.

La stessa cosa si può fare con le catene non degeneri ottenendo un'altra successione di Mayer-Vietoris per quest'altra omologia. Applicando il lemma dei 5 si ha che se il teorema precedente è verificato da K_0 , K_1 e K_2 allora è verificato anche da K. Useremo ora questo fatto per dimostrare induttivamente che il teorema è valido per ogni schema finito.

Esaminiamo prima il caso di uno schema simpliciale di tipo *cono*, ossia uno scema K ottenuto da uno schema simpliciale (I, H) prendendo $I' = I \cup \{i_0\}$ con $i_0 \notin I$, e $K = H \cup \{s \cup \{i_0\} \ : \ s \in H\}$.

Mostreremo ora che per entrambi le teorie l'omologia di un tale K è nulla ed in particolare quindi che il teorema è in tal caso verificato.

Sia infatti $\Sigma : S_p(K) \to S_{p+1}(K)$ l'omomorfismo definito da:

$$\Sigma(i_1, \ldots, i_p) = (i_0, \ldots, i_p)$$

si verifica facilmente che per ogni $c \in S(K)$ si ha:

$$\sigma \circ d \ (c) + d \circ \Sigma \ (c) = c$$

Ne segue che per $c \in S(K)$ con $d(c) = 0$, si ha $c = d \circ \Sigma(c)$ e quindi $H(K) = 0$.

Notiamo poi che Σ è compatibile con le relazioni di equivalenza definenti le catene non degeneri (ovviamente se il simplesso di partenza contiene già il vertice i_0, allora Σ di esso vale zero). Ne segue che tale Σ e d verificano la stessa relazione di prima e quindi che è anche $H'(K) = 0$.

Supponiamo adesso di aver dimostrato il teorema per tutti gli schemi simpliciali formati da meno di N simplessi e sia K uno schema avente N simplessi. Scelto un simplesso $s \in K$ che non sia nel bordo proprio di alcun altro simplesso (ad esempio di dimensione massima tra quelli di K), siano K_1 lo schema $K - \{s\}$ e K_2 lo schema formato da tutte le facce di s. Allora il teorema è verificato da K_1 e da $K_0 = K_1 \cap K_2$

perché hanno meno di N simplessi. E' verificato da K_2 perché esso è di tipo cono (è il cono su un "simplesso" di dimensione inferiore di uno); quindi è verificato per K.

Caso K qualsiasi. Il passaggio da K finito a K qualsiasi è fatto con un ragionamento di tipo induttivo, o meglio di tipo "passaggio al limite". Basterà osservare che $S(K)$ è l'unione degli $S(K')$ per K' sottoschema finito di K e che la stessa cosa vale per S'. Ad esempio per l'iniettività si ragiona così : se x è un ciclo in $S(K)$ la cui immagine x' in $S'(K)$ è bordo di un certo $y' \in S'(K)$, esiste un sottoschema finito K' di K tale che y' (ed x') appartengono ad $S'(K')$. Quindi x rappresenta una classe in $H(K')$ che va a zero in $H'(K')$ ed essendo $H(K') \to H'(K')$ un isomorfismo perché K' è finito, x rappresenta la classe nulla in $H(K')$ e quindi esso da la classe nulla anche in $H(K)$.

Osservazione: coomologia con cocatene alternanti.

La coomologia simpliciale di uno schema K è stata definita come l'omologia del complesso di cocatene costituito dagli $S^p(K) = \mathrm{Hom}(S_p(K), R)$. Dualizzando su R il complesso delle catene non degeneri $S'(K)$, si ottiene un altro complesso di cocatene $\tilde{S}^p(K) = \mathrm{Hom}(S'_p(K), R)$; la surgezione $S(K) \to S"(K) \to 0$ induce una inclusione $0 \to \tilde{S}^p(K) \to S^p(K)$. E' facile riconoscere che gli elementi $c \in \tilde{S}^p(K)$ sono le *cocatene alternanti*, ossia quelle il cui valore $c(i_0, \ldots, i_p)$, per $(i_o, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ con $\{i_0, \ldots, i_p\} \in K$, cambia nell'opposto per ogni trasposizione di $(i_0, \ldots, i_p)$.

Triangolazioni

Sia (I, K) uno schema simpliciale. Indicheremo con $|K|$ l'insieme delle $\phi : I \to \mathbb{R}$ che siano non negative, $supp(\phi) \in K$ (in particolare è un insieme finito) e $\sum_{i \in I} \phi(i) = 1$. In altri termini, detto V lo spazio vettoriale delle funzioni $\phi : I \to \mathbb{R}$ ed identificando ogni $i \in I$ con la sua funzione caratteristica ϕ_i definita da $\phi_i(j) = \delta_{ij}$ per $j \in I$, allora $|K|$ è l'unione di tutti gli inviluppi convessi dei simplessi di K. Introduciamo una topologia in $|K|$ nel modo seguente: ogni inviluppo convesso di un simplesso è dotato in modo naturale di una topologia; diremo che un sottoinsieme di $|K|$ è aperto se e solo se ha intersezione aperta con tutti i simplessi di K. Si dimostra facilmente il seguente:

Teorema 2 *Un sottoinsieme di $|K|$ è compatto se e solo se è chiuso ed ha intersezione non vuota solo con un numero finito di simplessi di K. Lo spazio $|K|$ è localmente compatto se e solo se K è localmente finito (ossia se ogni vertice è contenuto in un numero finito di simplessi)*

Una *triangolazione* di uno spazio topologico X è il dato di uno schema simpliciale (I, K) e di un omeomorfismo $f : |K| \to X$. Dimostreremo che se X è localmente compatto, ogni due triangolazioni di X hanno la stessa omologia. Questa affermazione deve essere precisata meglio perchè quel che vogliamo dire non è solo che tra i moduli di omologia relativi alle due triangolazioni vi è qualche isomorfismo, ma che ne esiste uno preferenziale; altrimenti l'utilità di una tale affermazione sarebbe molto limitata. Tutto ciò sarà ottenuto costruendo una teoria dell'omologia per spazi topologici, con un funtore dell'omologia simpliciale in essa e dimostrando che per schemi localmente finiti esso è un isomorfismo.

Omologia singolare

Sia X uno spazio topologico. Per p intero maggiore od eguale a -1, chiameremo $p-$simplesso singolare di X ogni applicazione continua del $p-$simplesso standard $\Delta_p = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \sum_0^p x_i = 1 \ , \ x_i \geq 0\}$ in X.

Se R è un anello, indicheremo con $S_p(X) = S_p(X, R)$ l'$R-$modulo libero sui $p-$simplessi singolari di X.

Operatori di faccia: per $h \in \{0,\ldots,p\}$ indichiamo con $\sigma_h : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ l'applicazione affine ottenuta inviando il vertice $i-$esimo di Δ_{p-1} nel vertice $i-$esimo di Δ_p se $i < h$ e nel vertice $i+1$ di Δ_p se $i \geq h$. Per ogni $p-$simplesso singolare $\phi : \Delta_p \to X$ definiamo $\delta(\phi) \in S_{p-1}(X)$ con la formula:

$$\delta(\phi) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h \phi \circ \sigma_h$$

Si ottiengono così omomorfismi $\delta : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ e si verifica facilmente che $\delta \circ \delta = 0$. Quindi $S(X) = \bigoplus_{p \geq -1} S_p(X)$ diviene un complesso di catene: La sua omologia $H(X)$ è detta *omologia singolare* (ridotta o augmentata) di X. L'omologia ordinaria si ottiene dal complesso $\bigoplus_{p\geq 0} S_p(X)$.

Se $f : X \to Y$ è una applicazione continua, associando ad ogni $p-$simplesso singolare $\phi : \Delta_p \to X$ la sua composizione con f, si ottiene un morfismo di complessi $f_* : S(X) \to S(Y)$ ed è chiaro quindi che l'omologia singolare diviene un funtore dalla categoria degli spazi topologici (ed applicazioni continue) nella categoria degli $R-$moduli (graduati).

Rapporto tra omologia simpliciale e singolare

Sia K uno schema simpliciale. Costruiamo un morfismo $\nu : S(K) \to S(|K|)$ del complesso delle catene simpliciali in quello delle catene singolari.
Al solito è sufficiente definire ν sulla base standard di $S(K)$, i simplessi. Se $(i_0,\ldots,i_p)$ è un $p-$simplesso orientato di K, ν gli faccia corrispondere l'applicazione affine σ del $p-$simplesso standard Δ_p in $|K|$ ottenuta applicando l'$h-$esimo vertice di Δ_p in i_h (si ricordi che $|K|$ è immerso in uno spazio vettoriale). E' facile conseguenza delle definizioni che tale ν è un morfismo di complessi e che rappresenta quindi una trasformazione naturale. Indicheremo ancora con ν l'omomorfismo associato a livello di omologia.

Teorema 3 *Nel caso (I,K) sia uno schema simpliciale localmente finito, ν è un isomorfismo. Conseguentemente due triangolazioni di uno stesso spazio localmente compatto, danno moduli di omologia canonicamente isomorfi.*

La dimostrazione di questo teorema ricalca quella fatta avanti per confrontare le due teorie di omologia simpliciale: si dimostra prima che esso è verificato da schemi finiti e si conclude poi la dimostrazione con un ragionamento di "passaggio al limite". Per la prima parte, occorre dimostrare l'annullamento dell'omologia singolare per uno schema di tipo cono e poter utilizzare la successione di Mayer-Vietoris. Il passaggio al limite è poi facile conseguenza del fatto che nel caso di uno schema localmente finito K, ogni compatto di $|K|$ è contenuto in $|K'|$ per qualche sottoschema finito K'.

L'annullarsi dell'omologia singolare di un cono è un corollario del teorema di invarianza omotopica che discuteremo ora.

Sia X uno spazio topologico e per $i = 1, 2$ sia $j_i : S_p(X) \to S_{p+1}(X \times [0,1])$ il morfismo indotto dalla applicazione $x \mapsto (x, i)$.

Costruiremo omomorfismi di $R-$moduli $\Sigma : S_p(X) \to S_{p+1}(X \times [0,1])$ verificanti per ogni $c \in S_p(X)$:

$$d \circ \Sigma\ (c) + \Sigma \circ d\ (c) = j_1(c) - j_0(c)$$

Se c è un ciclo, quindi $d(c) = 0$, si otterrà che $j_1(c)$ rappresenta la stessa classe di omologia di $j_1(C)$ ed avremo dimostrato il seguente:

Lemma 4 *j_0 e j_1 inducono lo stesso omomorfismo di $H(X)$ in $H(X \times [0,1])$*

Descriviamo la costruzione degli omomorfismi Σ:
per $h \in \{0,\ldots,p\}$ sia $\eta_h : \Delta_{p+1} \to \Delta_p \times [0,1]$ l'applicazione affine (si noti che $\Delta_p \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{p+2}$) ottenuta applicando l'$i-$esimo vertice di Δ_{p+1} nell'$i-$esimo vertice di $\Delta_p \times \{0\}$ se $i \leq h$ e nell'$(i-1)-$esimo vertice di $\Delta_p \times \{1\}$ se $i > h$. Se $\phi : \Delta_p \to X$

è un $p-$simplesso singolare di X, detta $F : \Delta_p \times [0,1] \to X \times [0,1]$ definita da $(x,t) \mapsto (\phi(x),t)$ poniamo:

$$\Sigma(c) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h F \circ \eta_h$$

Corollario 5 (Invarianza omotopica dell'omologia)
Applicazioni omotope inducono lo stesso omomorfismo in omologia

Dim. Se $F : X \times [0,1] \to Y$ è una omotopia tra due applicazioni f_0 , f_1 da X in Y, con le notazioni del precedente lemma si ha $f_0 = F \circ j_0$ e $f_1 = F \circ j_1$ per cui $f_{0*} = F_* \circ j_{0*} = F_* \circ j_{1*} = f_{1*}$.

Per ottenere la successione di Mayer-Vietoris procediamo come segue:
siano X_1 , X_2 sottospazi di X con $X_1 \cup X_2 = X$. Si ha una successione esatta:

$$0 \to S(X_1 \cap X_2) \to S(X_1) \oplus S(X_2) \to S(X)$$

L'immagine dell'ultimo omomorfismo è il sottocomplesso $\tilde{S}(X)$ di $S(X)$ generato dai simplessi singolari di X la cui immagine è totalmente contenuta in X_1 od in X_2, ed esso differisce in generale da $S(X)$. Si ha così una successione esatta:

$$0 \to S(X_1 \cap X_2) \to S(X_1) \oplus S(X_2) \to \tilde{S}(X) \to 0$$

che dà luogo ad una successione esatta lunga di omologia che verrà detta *successione di Mayer-Vietoris* per l'omologia singolare ni casi in cui l'inclusione $\tilde{S}(X) \to S(X)$ induca un isomorfismo tra i corrispondenti moduli di omologia. In tali casi diremo anche che *vale* la successione di Mayer-Vietoris.

Teorema 6 *Se X_1 , X_2 sono aperti, vale la successione di Mayer-Vietoris*

Dim. Si costruisce un morfismo $Sd : S(X) \to S(X)$ detto *suddivisione baricentrica* che possiede le seguenti due proprietà:
- è (algebricamente) omotopo all'identità;
ossia esiste un omomorfismo $\Sigma : S(X) \to S(X)$ verificante la relazione:

$$(*) \qquad \Sigma \circ d + d \circ \Sigma = Sd - id$$

- per ogni $c \in S(X)$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che la $n-$esima suddivisione $Sd^n(c)$ appartiene a $\tilde{S}(X)$.

Da ciò segue facilmente l'enunciato.

Per tale costruzione si veda ad esempio il testo di Greenberg.

Per concludere la dimostrazione del teorema 3, occorre avere la validità della successione di Mayer-Vietoris per la decomposizione di uno schema simpliciale (finito) K come unione di due suoi sottoschemi K_1 e K_2. Siccome $|K_1|$ e $|K_2|$ non sono aperti in $|K|$, non si può applicare il teorema precedente; si utilizzano allora loro intorni aperti di cui essi siano retratti (forti) di deformazione. Precisamente per ogni sottoschema $L \subset K$, costruiamo un intorno aperto $\Omega(L)$ di $|L|$ in $|K|$ di cui L sia retratto forte di deformazione. La costruzione è fatta in modo tale che per due sottoschemi L_1 e L_2 si abbia $\Omega(L_1 \cap L_2) = \Omega(L_1) \cap \Omega(L_2)$.
Ne seguirà, se $L_1 \cup L_2 = K$, la successione cercata di Mayer-Vietoris per l'omologia singolare, ottenuta da quella relativa agli aperti $\Omega(L_i)$ sostituendo i termini $H_p(\Omega(L_i))$ con gli $H(|L_i|)$ a loro isomorfi.
La costruzione di tali Ω si fa prendendo per ogni simplesso di K ed ogni sua faccia in L la "metà" del simplesso dalla parte della faccia.

Confronto con l'omologia cubica

In modo analogo a quello seguito per identificare tra loro i due tipi di omologia simpliciale e l'omologia simpliciale con quella singolare indichiamo come si possono identificare l'omologia singolare sopra introdotta e l'omologia simpliciale *cubica.*

Si costruisce per ogni n una applicazione continua del cubo di dimensione n nel simplesso standard di dimensione n. Ne risulterà individuata una trasformazione del modulo delle catene fatte con i simplessi in quello delle catene fatte con i cubi.

Spazi triangolati

Sia (I, K) uno schema simpliciale. Un *ordinamento* di un suo $n-$simplesso s è il dato di una $(n+1)-$pla $(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ per la quale $\{i_0, \ldots, i_n\} = s$.
Gli $n!$ ordinamenti di un $n-$simpleso si ripartiscono in due classi di parità, secondo che occorrano un numero pari o dispari di trasposizioni per passare dall'uno all'altro. Una *orientazione* di un $n-$simplesso è la scelta di una classe di suoi ordinamenti, che verranno chiamati *positivi.*

Due $n-$simplessi di K sono detti *contigui* se la loro intersezione è un simplesso di dimensione $n-1$.

Una orientazione di un $n-$simplesso s, induce una orientazione su ogni sua faccia $(n-1)-$dimensionale: quella in cui il vertice mancante seguito da un ordinamento positivo della faccia dà un ordinamento positivo del simplesso.

Le orientazioni di due $n-$simplessi distinti di K sono dette *compatibili* se i simplessi non sono contigui, oppure se lo sono ed inducono orientazioni opposte sulla loro faccia comune.

Una $n-$orientazione di uno schema simpliciale è la scelta di una orientazione per ogni suo $n-$simplesso in modo tale che queste siano a due a due compatibili tra loro.

Uno schema simpliciale (I, K) è detto una *pseudovarietà* di dimensione n se soddisfa le seguenti condizioni:
-ogni simplesso è faccia di qualche $n-$simplesso
-ogni simplesso di dimensione $n-1$ appartiene ad esattamente due simplessi di dimensione n

Una pseudovarietà di dimensione n è detta *irriducibile* se si può passare da un suo qualsiasi $n-$simplesso ad un altro con una catena di passaggi tra $n-$simplessi contigui.

Proposizione 7 *Sia K una pseudovarietà irriducibile di dimensione n. Se K è infinita (ossia se $|K|$ non è compatto) si ha $H_n(K, R) = (0)$ per ogni anello R. Se K è finita si ha $H_n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mentre $H_n(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ se K è orientata e $H_n(K, \mathbb{Z}) = (0)$ se K non è orientabile.*

Dim. Sia X la famiglia degli $n-$simplessi di K e sia fissato un ordinamento su ognuno di essi (ad esempio si bene ordini l'insieme I dei vertici; in tal modo ogni simplesso di K avrà un ordinamento preferenziale). Ogni catena $c \in S_n(K, R)$ si scrive $c = \sum_{s \in X} n_s \cdot s$ ove $s \to n_s$ è una applicazione di X in R a supporto finito. Se una tale c è un ciclo, essendo K una pseudovarietà, si ha che se $s, s' \in X$ sono contigui, allora $n_s = n_{s'}$. Da questa osservazione seguono facilmente tutte le asserzioni dell'enunciato.

Oss. Vale una analoga proposizione per le pseudovarietà a bordo. Visto l'isomorfismo tra omologia simpliciale ed omologia singolare, si deducono da tali proposizione vari fatti sull'omologia di spazi di cui sia facile scrivere una triangolazione. Ad esempio che $H_n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e che la mappa antipodale di S^n in se induce su tale gruppo la moltiplicazione per $(-1)^{n+1}$.

Coomologia

Sia (M,d) un $R-$modulo differenziale. Posto $M^* = Hom(M,R)$ e $\delta : M^* \to M^*$ definita da $\delta(h) = h \circ d$ per $h \in M^*$, si ha $\delta^2 = 0$ e quindi (M^*, δ) è un $R-$modulo differenziale ; la sua omologia $H(M^*)$ è detta *coomologia* di (M,d).

L'applicazione bilineare $M^* \times M \to R$ verrà indicata con $(\omega, \gamma) \to \int_\gamma \omega$.
con tale notazione la definizione di δ equivale formalmente alla validità della "formula di Stoke's" :

$$\int_\gamma \delta\omega = \int_{d\gamma} \omega$$

Per $\omega \in Z(M^*) = ker(\delta)$ e $\gamma \in Z(M) = ker(d)$, la quantità $\int_\gamma \omega$ non cambia aggiungendo ad ω un elemento di $B(M^*) = Im(\delta)$ o a γ un elemento di $B(M^*) = Im(d)$. Risulta quindi ben definita una applicazione bilineare $H(M^*) \times H(M) \to R$. Essa definisce una applicazione lineare $\sigma : H(M^*) \to H(M)^*$ della coomologia nel duale su R della omologia . Risultano così determinati due $R-$moduli $E(M) = ker(\sigma)$ e $F(M) = coker(\sigma)$ ed una successione esatta:

$$0 \to E(M) \to H(M^*) \to H(M)^* \to F(M) \to 0$$

Teorema 8 *$H(M^*$, $E(M)$, $F(M)$ sono funtori contravarianti da $\{R$-moduli differenziali$\}$ in $\{R$-moduli$\}$.*

Dim. L'enunciato sottintende che c'è un modo naturale di associare ad un omomorfismo $h : M_1 \to M_2$ di $R-$moduli differenziali , degli omomorfismi $H(M_2^*) \to H(M_1^*)$, $E(M_2) \to E(M)$ e $F(M_2) \to F(M_1)$ in modo da ottenere un funtore. Si può osservare che se $h : M_1 \to M_2$ è un omomorfismo di $R-$moduli differenziali , allora $h^* : M_2^* \to M_1^*$ è anche un omomorfismo di $R-$moduli differenziali e si verifica così che $H(M^*)$ è un funtore contravariante. Si osserva poi che $\alpha : H(M^*) \to H(M)^*$ definita sopra è una trasformazione naturale di funtori contravarianti . Infine E ed F sono i funtori nucleo e conucleo della trasformazione α.

Studieremo ora i funtori E e F . Esplicitiamo dapprima $E(M)$. Un elemento di $Z(M^*)$ è un omomorfismo $h : M \to R$ che è nullo su $B(M)$. Esso induce la classe nulla in $H(M)^*$ se $h = 0$ su $Z(M)$. Quindi gli elementi di E sono rappresentabili da omomorfismi $h : M \to R$ nulli su $Z(M)$; usando la successione :

$$0 \to Z \to M \xrightarrow{d} B \to 0$$

essi si identificano a $Hom(B,R)$ (si noti che quando riesamineremo tutto ciò nel caso di $R-$moduli graduati , anche gli E lo saranno ma in quel caso gli elementi di E^p saranno rappresentati da $Hom(B_{p-1}, R)$ perchè c'è di mezzo una fattorizzare con d).

Tali elementi danno lo zero in E se e solo se danno lo zero in $H(M^*)$, ossia sono fattorizzabili con d (esiste $k : M \to R$ tale che $h = k \circ d$).
In conclusione : $E = \{$omomorfismi $B \to R$ modulo quelli estendibili ad omomorfismi $M \to R\}$. Se si ha una graduazione su M , si ha quindi :

$$E^q = Hom(B_{q-1}, R)/Hom(M_{q-1}, R)$$

ove il denominatore è "mandato" nel numeratore tramite l'omomorfismo "restrizione a B_{q-1}". Possiamo ridescrivere tutto ciò così : si applichi il funtore $Hom(-,R)$ alla successione esatta :

$$0 \to B_{q-1} \to M_{q-1} \to M_{q-1}/B_{q-1}$$

se ne deduce una successione esatta :

$$0 \to Hom(M_{q-1}/B_{q-1}, R) \to Hom(M_{q-1}, R) \to Hom(B_{q-1}, R) \to E^q \to 0$$

Infatti l'esattezza nel termine E^q segue dalla descrizione precedente ;
l'esattezza negli altri punti deriva dal fatto che il funtore $Hom(-,R)$ è esatto a sinistra

nel senso della seguente:
Def. Un funtore H è detto *esatto a sinistra* se per ogni successione esatta :

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

è esatta la successione

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

Corollario 9 *Se R è un corpo $E^q = 0$, ossia $H(M^*) \to H(M)^*$ è iniettiva.*

Esplicitiamo ora $F(M)$. Un elemento di $H(M)^*$ è un omomorfismo $h : Z \to R$ nullo su B. Ci si chiede se esso è estendibile a M . Ciò può essere descritto così : si applichi il funtore $Hom(-, R)$ alla successione :

$$0 \to Z/B \xrightarrow{j} M/B \xrightarrow{d} B \to 0$$

ove j è indotta dall'inclusione e $Z/B = H(M)$. Si otterrà la successione esatta :

$$0 \to Hom(B, R) \to Hom(M/B, R) \to Hom(H(M)) \to F(M) \to 0$$

Corollario 10 *Se R è un corpo anche $F(M) = 0$; si ha quindi un isomorfismo tra la coomologia di M e il duale della sua omologia .*

Funtori Ext

Come abbiamo visto $E(M)$ e $F(M)$ sono entrambi legati a problemi di estensione di omomorfismi ; essi sono entrambi nulli se l'anello dei coefficienti è un corpo . In questo prossimo paragrafo esaminiamo il problema di calcolare $E(M)$ e $F(M)$ nel caso di coefficienti qualsiasi descrivendo come si imposta in tal caso uno studio sistematico dei problemi di estensione di omomorfismi ; un caso particolarmente importante è quello di un anello ad ideali principali.
Def. Diremo che una successione esatta corta di $R-$moduli :

(1) $\qquad O \to A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$

- *spezza a destra* se esiste $\sigma : C \to B$ tale che $\beta \circ \sigma = id_C$.
- *spezza a sinistra* se esiste $\tau : B \to A$ tale che $\tau \circ j = id_A$.

Proposizione 11 *Per una successione esatta corta come la (1) sono fatti equivalenti: spezzare a sinistra o a destra o essere (isomorfa alla) somma diretta* $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$.

Def. un modulo C è detto *proiettivo* se verifica una delle seguenti condizioni equvalenti tra loro :

- se $\alpha : A \to B$ è surgettiva , ogni $f : C \to B$ è la composizione di una $\phi : C \to A$ con α
- ogni successione esatta come la (1) spezza
- C è fattore diretto di un modulo libero (ossia esiste un modulo D tale che $C \oplus D$ è libero).

Def. Chiameremo *risoluzione* di un modulo A ogni successione esatta :
(2) $\quad \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$
Tale risoluzione sarà detta *libera* o *proiettiva* se ogni F_i è libero o proiettivo.
Se B è un altro modulo , applicando alla (2) il funtore $Hom(-, B)$ si ottiene una successione :
(3) $\cdots \to Hom(F_n, B) \to \cdots \to Hom(F_0, B) \to Hom(A, B) \to 0$
che in generale non sarà esatta ; essa sarà comunque un complesso .

Teorema 12 *L'omologia del complesso (3) "rimane la stessa" per ogni risoluzione proiettiva di A ; i suoi termini verranno denotati $Ext^p(A,B)$.*

Nota. Nell'enunciato precedente l'espressione tra virgolette è espressiva ma ambigua. Gli enunciati seguenti sono meno sintetici ma precisano più esattamente quel che succede.

Teorema 13 *Sia*
(4) $\quad \cdots \to F'_n \to F'_{n-1} \to \cdots \to F'_1 \to F'_0 \to A' \to 0$
un'altra risoluzione di A e supponiamo che la (2) sia libera. Allora ogni morfismo $f : A \to A'$ si estende ad un morfismo di complessi :

$$\phi : (Hom(F_n, B))_{n\in\mathbb{N}} \to (Hom(F'_n, B))_{n\in\mathbb{N}}$$

e due qualsiasi tali estensioni sono (algebricamente) omotope.

Questo teorema assicura non solo che i moduli $Ext^p(A,B)$ sono ben definiti (ossia indipendenti dalla particolare risoluzione proiettiva utilizzata per "calcolarli") ma associa ad ogni morfismo $f : A \to A'$ morfismi $Ext^p(A',B) \to Ext^p(A,B)$: se ne deduce che gli $Ext^p(-,-)$ sono dei funtori contravarianti nel primo argomento . E' poi (quasi) ovvio che sono anche dei funtori covarianti nel secondo argomento.

Dim. del teorema: Siano date le risoluzioni :
(a) $\quad \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$
(b) $\quad \cdots \to F'_n \to F'_{n-1} \to \cdots \to F'_1 \to F'_0 \to A' \to 0$

Dato un morfismo $\phi : A \to A'$ dobbiamo costruire morfismi $\phi_i : F_i \to F'_i$ per $i \geq 0$ che assieme alle (a) , (b) formino un diagramma commutativo. Ciò può essere fatto utilizzando formalmente la prima delle proprietà che caratterizzano i moduli proiettivi. La stessa cosa per la costruzione di una omotopia tra due diverse tali estenzioni (il tipo di argomenti che dimostrano ciò si segue bene su "diagrammi commutativi" che non ho ancora imparato a scrivere in LaTeX! :disegnateli voi.)
Nota. E' da notare l'uso che viene fatto qui delle omotopie (algebriche) : che due morfismi del complesso (F_n) in (F'_n) siano omotopi può apparire irrilevante perchè entrambi i complessi sono a omologia nulla (si dicono quindi *aciclici*) essendo per definizione le due risoluzione esatte . Ma l'esistenza di tali omotopie comporta che con qualunque funtore si trasformino tali complessi aciclici (e in generale potrà accadere che i trasformati non siano aciclici) si otterranno tra essi due morfismi omotopi che definiranno quindi lo stesso morfismo in omologia.

Teorema 14 *Per ogni modulo G e successione esatta :*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

si ha una successione esatta lunga :

$$\begin{gathered} 0 \to Hom(C,G) \to Hom(B,G) \to Hom(A,G) \to Ext^1(C,G) \to \\ \to Ext^1(B,G) \to Ext^1(A,G) \to Ext^2(C,G) \to \cdots \end{gathered}$$

Nota. La successione precedente può essere scritta in termini dei soli Ext perchè si hanno identificazioni naturali $Hom(U,V) \simeq Ext^0(U,V)$. Si cerchi poi di rienunciare il teorema precedente in una forma più precisa : si vorrà che per ogni successione esatta corta esistano trasformazioni naturali di funtore da $Ext^p(A,G)$ a $Ext^{p+1}(C,G)$ di modo che $\cdots$) . Oppure che si ha un funtore dalla categoria delle successioni esatte corte di moduli nella categoria delle successioni esatte lunghe $\cdots$. Come al solito enunciati nel linguaggio dei funtori precisano cosa si intende dicendo che le costruzioni fatte , sono "canoniche" o "naturali".
Dim.del teorema La dimostrazione consiste nel costruire un gran diagramma commutativo a righe successioni esatte corte le cui colonne siano risoluzioni proiettive di A, B, C

rispettivamente . Tali colonne costituiscono una successione esatta corta di complessi (aciclici) che trasformata col funtore $Hom(-,G)$ dà una successione di complessi che è esatta (perchè i moduli sono proiettivi) e che dà quindi origine ad una successione esatta lunga di omologia (che è quella dell'enunciato). La costruzione di tale "gran diagramma" si fa partendo da risoluzioni $(F_i), (G_i)$ di A e C , completando con le righe esatte $0 \to F_i \to\to F_i \oplus G_i \to G_i \to 0$ e definendo morfismi $F_{i+1} \oplus G_{i+1} \to F_i \oplus G_i$ induttivamente in modo da avere diagrammi commutativi . Automaticamente avremo una risoluzione proiettiva di B e la dimostrazione viene così conclusa.

Caso di coefficienti in un anello ad ideali principali

Sia ora R un anello ad ideali principali . Allora ogni sottomodulo di un modulo libero è libero (in questo caso i moduli proiettivi non sono altro che i moduli liberi) ; ne segue che se $F_0 \to A$ è un morfismo surgettivo con F_0 libero , il suo nucleo F_1 è pure libero. Quindi ogni modulo ha una risoluzione proiettiva (F_i) con $F_i = 0$ per $i > 1$ e di conseguenza su un anello a ideali principali si ha $Ext^p(A, B) = 0$ per ogni $p > 1$.

Si verifica anche facilmente che se A, B sono moduli finitamente generati anche gli $Ext^p(A, B)$ lo sono : ciò è vero per ogni anello noetheriano , in particolare per quelli a ideali principali .

Torniamo allo studio dei funtori $E(M), F(M)$. Le successioni esatte trovate là dimostrano che $E^p(M) \simeq Ext^1(M_{q-1}/B_{q-1}, R)$ e $F^p(M) \simeq Ext^1(B_p, R)$. Si deducono da ciò i due seguenti teoremi :

Teorema 15 *Se R è un anello a ideali principali e M_p è un modulo libero , allora $F^p = 0$, ossia l'omomorfismo $\alpha : H(M^*) \to H(M)^*$ è surgettivo .*

Dim. E' sufficiente osservare che $B_p \subset M_p$ è in tal caso un modulo libero , ammette quindi una risoluzione libera nulla e quindi $Ext^1(B_p, R) = 0$.

Teorema 16 *Se R è un anello a ideali principali e M_{p-2} è libero , allora $E^p \simeq Ext^1(H_{p-1}(M), R)$. Se poi H_{p-1} è finitamente generato allora E^p è isomorfo (non canonicamente) al sottomodulo di torsione di $H_{p-1}(M)$*

Dim. Si ha $E^p \simeq Ext^1(M_{p-1}/B_{p-1}, R)$. Si consideri la successione esatta

$$0 \to Z_{p-1}/B_{p-1} \to M_{p-1}/B_{p-1} \to M_{p-1}/Z_{p-1} \to 0$$

Il modulo M_{p-1}/Z_{p-1} è isomorfo (tramite l'operatore di bordo) ad un sottomodulo di M_{p-2} ed è quindi libero ; perciò $Ext^1(M_{p-1}/B_{p-1}, R) = 0$. Ne segue che la successione esatta lunga degli Ext originata dalla successione esatta corta di sopra dà un isomorfismo tra $Ext^1(M_{p-1}/B_{p-1})$ e $Ext^1(H_{p-1}, R)$ perchè $Z_{p-1}/B_{p-1} = H_{p-1}$.

La seconda affermazione del teorema è conseguenza dei seguenti calcoli. Sia H un modulo finitamente generato su un anello a ideali principali . Il suo sottomodulo di torsione $T = \{x \in H : \lambda x = 0 \text{ per qualche } \lambda \neq 0\}$ ha un supplementare K libero ed è finitamente generato . Ne segue intanto che $Ext^1(H, R) \simeq Ext^1(T, R)$. Inoltre per il teorema dei divisori elementari , T è somma diretta di un numero finito di moduli semplici , cioè del tipo $R/(d)$ per $d \in R$. Dalla successione esatta $0 \to R \xrightarrow{\sigma} R \to R/(d) \to 0$ ove σ è definita da $\sigma(x) = dx$ si ottiene $Ext^1(R/(d), R) \simeq R/(d)$. Siccome gli Ext commutano con le somme dirette si ottiene un isomorfismo (non canonico) $Ext^1(T, R) \simeq T$.

Gruppi di omotopia

Una *coppia di spazi* è una coppia (X, A) ove X è uno spazio topologico ed $A \subset X$ è un sottoisieme. Un *morfismo* tra coppie (X, A) e (Y, B) è una applicazione continua $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$. Si ha così la categoria delle coppie di spazi. Due morfismi

$f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ sono detti *omotopi* se esiste una omotopia F tra f_0 e f_1 tale che per $a \in A$ e $t \in [0,1]$ sia $F(a,t) \in B$. Indicheremo con $[(X,A),(Y,B)]$ l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni di (X, A) in (Y, B)]. Uno *spazio con punto base* è una coppia (X, x) ove X è uno spazio topologico e x è un suo punto (se si vuole è un tipo particolare di coppia di spazi). Si definiscono in modo analogo le *terne di spazi* , le *coppie di spazi con punto base* etc. con le relative nozioni di omotopia. Fissiamo un punto base $*$ in ogni sfera S^n (ad esempio $* = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$). Per uno spazio con punto base (X, x) poniamo $\pi_n(X, x) = [(S^n, *), (X, x)]$. Per una coppia con punto base (X, A, x) poniamo $\pi_n(X, A, x) = [(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, x)]$ (si noti che quest'ultimo non è definito per $n = 0$ perchè $S^{-1} = \emptyset$ non possiede un punto base). Si introducono strutture di gruppo su $\pi_n(X, x)$ per $n \geq 1$ (gruppi di omotopia) e sui $\pi_n(X, A, x)$ per $n \geq 2$ (gruppi di omotopia relativa) in modo analogo a quanto fatto per il gruppo fondamentale di uno spazio. Tali gruppi risultano essere commutativi per $n \geq 3$ nel caso relativo e per $n \geq 2$ nel caso assoluto. Si ha una successione esatta :

$$\cdots \to \pi_n(A, x) \to \pi_n(X, x) \to \pi(X, A, x) \to \pi_{n-1}(a, x) \to \cdots$$

Si ha inoltre una azione di $\pi_1(A, x)$ sui termini della precedente successione esatta che commuta con tutti gli omomorfismi di tale successione; tale azione, nel caso di $\pi_n(X, A, x)$ può essere descritta nel modo seguente: usando coordinate polari $S^{n-1} \times [0, 1] \to D^n$ si applica (s, t) in modo indipendente da s per $0 \leq t \leq 1/2$ e al variare di t secondo come prescritto dal dato laccetto in A; su $S^{n-1} \times [1/2, 0]$ invece come prescritto dall'elemento dato in $\pi_n(X, A, x)$. Tale azione, nel caso che $\pi_1(A, x)$ sia commutativo, è banale su $\pi_1(A, x)$ stesso; lo è su $\pi_1(X, x)$ se e solo se $\pi_1(A, x)$ è nel centro di $\pi_1(X, x)$. Ma anche in tal caso può essere non banale sui π_n con $n \geq 2$ come accade ad esempio per $A = X = S^1 \vee S^n$.

Sia $\phi : E \to X$ un fibrato (con o senza gruppo di struttura) in cui la fibra F e lo spazio base X siano connessi per archi (quindi anche lo spazio totale lo sarà). Siano fissati punti base $x \in X$ e $*$ in F_x =fibra sopra x, che farà da punto base anche per E . Si hanno omomorfismi $i_* : \pi_n(F_x, *) \to \pi_n(E, *)$ e $\phi : \pi_n(E, *) \to \pi_n(X, x)$ associati all'inclusione $i : F_x \to E$ e alla proiezione $\phi : E \to X$. Definiamo per $n > 1$, omomorfismi $\partial : \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(F_x, *)$ nel modo seguente: una classe α in $\pi_n(X, x)$ è rappresentabile con una applicazione continua $a : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x)$.
Il fibrato $a^*(E)$ su D^n è banale perchè D^n è contrattile; d'altra parte $a^*(E)$ ha una sezione s su S^{n-1}, perchè tutte le fibre sui punti di S^{n-1} sono identificate alla fibra di ϕ su x. Si ottiene così una applicazione continua $\sigma : S^{n-1} \to F$ che dà la classe $\partial\alpha \in \pi_{n-1}(F, *)$ che volevamo definire.

Teorema 17 *Se $\phi : E \to X$ è un fibrato con fibra F e base X connessi per archi, si ha una successione esatta lunga :*

$$\cdots \to \pi_n(F, *) \to \pi_n(E, *) \to \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(F, *) \to \cdots$$

che termina con :

$$\cdots \pi_1(F, *) \to \pi_1(E, *) \to \pi_1(X, x) \to 0$$

Nota. Nelle ipotesi del precedente teorema, se il fibrato possiede una sezione globale $s : X \to E$, le $\phi_* : \pi_n(E, *) \to \pi_n(X, x)$ hanno inverse destre s_* , per cui non solo gli omomorfismi ∂ sono tutti nulli e la successione esatta lunga di omotopia del fibrato si decompone in tante successioni esatte corte una per ogni n, ma in più queste spezzano di modo che si ottengono isomorfismi $\pi_n(E, *) \simeq \pi_n(X, x) \oplus \pi_n(F, *)$ per $n \geq 2$; per $n = 1$ essendo i gruppi non commutativi, si avrà in generale una azione del gruppo fondamentale della base su quello della fibra, che esibisce $\pi_1(E, *)$ come loro prodotto semidiretto.
Per n intero positivo, diremo che (X, x) è $n-$semplice se l'azione di $\pi_1(X, x)$ su $\pi_n(X, x)$

è banale. Per $n = 1$ ciò accade precisamente quando $\pi_1(X, x)$ è commutativo. La relazione di equivalenza indotta da tale azione, coincide, per X connesso per archi con quella indotta dalla mappa $\pi_n(X, x) \to [S^n, X]$ ottenuta trascurando il punto base. Quindi uno spazio (X, x) connesso per archi è $n-$semplice se e solo se non c'è differenza tra le classi di omotopia di applicazioni continue di S^n in X con punto base e quelle senza punto base.

Teorema 18 *Sia $\sigma : (X, x) \to (Y, y)$ un rivestimento. L'omomorfismo indotto in omotopia da σ è iniettivo a livello dei gruppi fondamentali ed è un isomorfismo tra quelli di ordine superiore.*

La dimostrazione è una facile conseguenza del teorema di monodromia di cui riportiamo l'enunciato :

Teorema 19 *Siano $\sigma : X \to Y$ un rivestimento e $f : T \to X$ una applicazione continua. Se $G : T \times [0, 1] \to Y$ è una omotopia che inizia con $g = \sigma \circ f$, allora esiste una omotopia $F : T \times [0, 1] \to X$ che inizia con f e tale che $G = \sigma \circ F$.*

Calcolo di alcuni gruppi di omotopia

Indichiamo con $F_r(n)$ l'isieme delle $r-$uple di vettori ortonormali in $\mathbb{R}^n$.
Si ha $F_1(n) = S^{n-1}$ e $F_{n-1}(n) = SO(n)$. Per $0 < r < n$ e $0 \leq p \leq n - r - 1$, trascurando in una $r-$upla gli ultimi p vettori, si ottiene una applicazione continua $F_{r+p}(n) \to F_r(n)$ che è un fibrato a fibra $F_p(n - r)$. Le successioni esatte di omotopia di tali fibrati permettono di calcolare alcuni gruppi di omotopia. Vediamo ad esempio i gruppi fondamentali degli $SO(n)$.
– $SO(2)$ è S^1 per cui $\pi_1(SO(2)) \simeq \mathbb{Z}$.
– Per $SO(3)$ utilizziamo il fibrato $SO(3) \to S^2$ a fibra $SO(2) \simeq S^1$. Essendo $\pi_1(S^2) = 0$ e $\pi_2(S^1) = 0$ tale fibrato dà una successione esatta:

$$1 \to \pi_2(SO(3)) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(SO(3)) \to 1$$

Ciò identifica $\pi_1(SO(3))$ e $\pi_2(SO(3))$ col nucleo e conucleo di un certo omomorfismo $h : \mathbb{Z} \simeq \pi_2(s^2) \to \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Tale h è precisamente l'omomorfismo ∂ utilizzato per la costruzione della successione esatta di omotopia del fibrato; si può vedere applicando direttamente la definizione che h è la moltiplicazione per due cosicchè $\pi_2(SO(3)) \simeq 0$ e $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Oppure si può mostrare che due volte il generatore di $\pi_1(SO(2))$ va a zero in $\pi_1(SO(3))$. Ne segue che h è o l'identità o la moltiplicazione per due; in ogni caso è iniettiva e quindi $\pi_2(SO(3)) = 0$. Per mostrare che h è effettivamente la moltiplicazione per due e che conseguentemente $\pi_1(SO(3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sarà sufficiente mostrare che $SO(3)$ non è semplicemente connesso. Trattandosi di una varietà di dimensione tre, toglierle un punto non altera il gruppo fondamentale, quindi è sufficiente esaminare $SO(3) - \{1\}$. Ogni suo elemento g è una rotazione attorno ad una retta $r(g) \in \mathbb{P}^2$; considerando l'ambiguità con cui è definito l'angolo $\theta(g) \in]0, 2\pi[$ di rotazione di g attorno alla retta $r(g)$ (che è precisabile solo se si fissa una orientazione di $r(g)$) si verifica che $SO(3)$ non può essere semplicemente connesso.
Per calcolare $\pi_1(SO(n)$ con $n \geq 4$, utilizzando la successione esatta di omotopia del fibrato $SO(n) \simeq F_{n-1}(n) \to F_1(n) \simeq S^{n-1}$ a fibra $F_{n-2}(n-1) \simeq SO(n-1)$ si trova $\pi_1(SO(3)) \simeq \pi_1(SO(n)$. In conclusione il gruppo fondamentale di $SO(n)$ è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tranne che per $n = 2$ nel qual caso è $\mathbb{Z}$.

Questo modo di ragionare si applica più in generale nel modo seguente:
sia $1 < p < n$; si hanno fibrati $F_p(n) \to F_{p-1}$ a fibra S^{n-p}
e $F_p(n) \to F_1(n) \simeq S^{n-1}$ a fibra $F_{p-1}(n-1)$.

Se ne deducono successioni esatte :

$$\cdots \to \pi_i(S^{n-p}) \to \pi_i(F_p(n)) \to \pi_i(F_{p-1}(n)) \to \pi_{i-1}(S^{n-p}) \to \cdots$$

e

$$\cdots \to \pi_{i+1}(S^{n-1}) \to \pi_i(F_{p-1}(n-1)) \to \pi_i(F_p(n)) \to \pi_i(S^{n-1}) \to \cdots$$

Dalle quali si ottiene :

$$\pi_i(F_p(n)) \simeq \pi_i(F_{p-1}(n)) \qquad \text{se} \qquad i < n-p$$

e

$$\pi_i(F_p(n)) \simeq \pi_i(F_{p-1}(n-1)) \qquad \text{se} \qquad i < n-2$$

Abbiamo calcolato i gruppi $\pi_1(F_p(n))$ per $p = n-1$. Utilizzando la prima delle precedenti successioni si verifica che per $p < n-1$ essi sono tutti nulli. Esaminiamo il secondo gruppo di omotopia. Per $n-p > 0$ si ottiene

$$\pi_2(F_p(n) \simeq \pi_2(F_1(n-p+1)) \simeq \pi_2(S^{n-p}) \simeq 0$$

e per $n = p+2$ siha

$$\pi_2(F_p(p+2)) \simeq \pi_2(F_2(4))$$

Analogamente per $p < n-h$ si ha che $F_p(n)$ ha nulli i primi h gruppi di omotopia e per $n = p+h$ si ha :

$$\pi_h(F_p(p+h)) \simeq \pi_h(F_2(2+h))$$

I gruppi $\pi_h(F_2(2+h))$ per $h \geq 2$ possono essere determinati utilizzando il teorema di Hurewicz per il quale essi sono isomorfi ai corrispondenti gruppi di omologia intera; questi ultimi sono poi calcolabili utilizzando tecniche di trasversalità con i seguenti argomenti: sia $n = h+2$ e sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ l'insieme delle coppie di vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono linearmente dipendenti; $F_2(n)$ è retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{2n} - \Sigma$. La successione esatta di omologia della coppia $(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n} - \Sigma)$ riduce il problema del calcolo di $H_{n-2}(\mathbb{R}^{2n} - \Sigma, \mathbb{Z})$ a quello del gruppo di omologia relativa $H_{n-1}(\mathbb{R}^{2n} mod \mathbb{R}^{2n} - \Sigma, \mathbb{Z})$. Ora Σ è sostanzialmente una sottovarietà liscia in $\mathbb{R}^{2n}$ di codimensione $n-1$ (ha una sola singolarità σ_0) ed il suo complementare ha nulli tutti i gruppi di omotopia di ordine basso. In tali condizioni il gruppo che vogliamo determinare è la somma diretta di tanti fattori $\mathbb{Z}$ quante sono le componenti connesse di Σ che hanno un fibrato normale orientabile e di tanti fattori $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ quante sono le rimanenti componenti connesse. Nel nostro caso si ha una sola componente connessa ed essendo $\mathbb{R}^{2n}$ orientabile, l'orientabilità del suo fibrato normale equivale alla sua orientabilità. Per determinare se è orientabile o no, consideriamo l'applicazione $\phi : S^{n-1} \times \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \Sigma - \{\sigma_0\}$ definita da $(x,(a,b)) \to (ax, bx)$; si tratta di un rivestimento doppio determinato dall'involuzione $(x,a,b) \to (-x,-a,-b)$. Tale involuzione conserva l'orientazione di $S^{n-1} \times \mathbb{R}^2 - \{0\}$ se e solo se n è pari cosicchè si trova infine che $\pi_h(F_p(p+h)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ se h è pari o $h = 1$ e a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se h è dispari.

Fibrati

Due applicazioni $f : X \to A$ e $g : Y \to B$ sono dette omeomorfe se esistono omeomorfismi $h : X \to Y$ e $k : A \to B$ per cui è commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

Fissato uno spazio topologico F chiameremo *fibrato a fibra F* una applicazione continua $\phi : E \to X$ se ogni $x \in X$ ha un intorno U tale che $\phi : \phi^{-1}(U) \to U$ è omeomorfa alla proiezione $U \times F \to U$; ogni tale omeomorfismo sarà chiamato *carta banalizzante* su U . Due carte banalizzanti su aperti U, V di X determinano una applicazione $\sigma : U \cap V \to \mathcal{O}(F)$=gruppo degli omeomorfismi di F in se .

Siano fissati un gruppo topologico $\mathcal{G}$ ed una sua azione effettiva su F (intendiamo con ciò che è assegnata una applicazione continua $\mathcal{G} \times F \to F$, indicata con $(g, x) \to$

$g(x)$, verificante le proprietà: $g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)(x)$ e $g(x) = x$ per ogni x se e solo se g è l'identità di G; in pratica G è un sottogruppo di $\mathcal{O}(F)$). Diremo *compatibili* due carte se la trasformazione σ da esse determinata è a valori in $\mathcal{G}$ ed è continua. Chiameremo *riduzione del gruppo strutturale* a $\mathcal{G}$ per un fibrato $\phi : E \to X$ a fibra F il dato di un ricoprimento aperto di X e di carte banalizzanti sui suoi elementi che siano a due a due compatibili ; due tali riduzioni sono equivalenti se le carte dell'una e dell'altra sono compatibili tra loro. Una classe di equivalenza di tali oggetti sarà chiamata *fibrato a fibra F e gruppo strutturale $\mathcal{G}$* ; diremo che X è la *base* e E lo *spazio totale* del fibrato .

Un *morfismo* tra fibrati $\phi : E \to X$ e $\phi' : E' \to X'$ a fibra F è una coppia di applicazioni continue $f : E \to E'$ e $g : X \to X'$ tali che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} \\ X & \xrightarrow[g]{} & X' \end{array}$$

e tali che per ogni $x \in X$ l'applicazione indotta da f di $\phi^{-1}(x)$ in $\phi'^{-1}(g(x))$ sia un omeomorfismo. In tal caso , fissate carte banalizzanti U, U' su X, X' tali che $g(U) \subset U'$ si ottiene una applicazione $\tau : U \to \mathcal{O}(F)$: richiederemo che essa sia a valori in $\mathcal{G}$ e che sia continua nel caso si voglia un morfismo tra fibrati con (lo stesso) gruppo strutturale. Tutto ciò definisce in particolare cosa è un isomorfismo . Un fibrato $\phi : E \to X$ è *banale* se è isomorfo al fibrato prodotto $X \times F \to F$.

Sia $\phi : E \to X$ un fibrato a fibra F. Se $f : T \to X$ è continua , si costruisce un fibrato a fibra F su T nel seguente modo : sia

$$f^*(E) = \{(e,t) \in E \times T : \phi(e) = f(t)\}$$

e sia $f^*(\phi) : f^*(E) \to T$ l'applicazione $(e,t) \to t$; si verifica che tale fibrato è univocamente determinato dalla condizione che esista una $g : f^*(E) \to E$ che assieme ad f dia un morfismo di fibrati . Nel caso si parta da un fibrato con gruppo strutturale , anche il fibrato costruito lo è . In ogni caso esso sarà detto ottenuto per *cambiamento di parametri* o anche *indotto* da f.

Def. Siano $\phi : E \to X$ un fibrato e $f, g : T \to X$ due applicazioni continue. Diremo che f, g sono *contigue* (per E) se esistono un aperto U in X su cui E si banalizza ed un aperto V in T tali che $f(x), g(x) \in U$ se $x \in V$ e $f(x) = g(x)$ se $x \notin V$.

Lemma 20 *Applicazioni contigue inducono fibrati isomorfi.*

La dimostrazione consiste nell'osservare che su $x \notin V$ le fibre dei due fibrati coincidono e che su un $x \in V$ la banalizzazione di E identifica tali fibre.

Sia assegnato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X. Chiamiamo *contigue* (per $\mathcal{U}$) due applicazioni $f, g : T \to X$ se esiste $i \in I$ tale che se $x \in T$ e $f(x) \neq g(x)$ allora $f(x), g(x) \in U_i$.

Una omotopia $H : T \times [0,1] \to X$ è detta *elementare* se esistono $i \in I$ e $V \subset T$ tali che per ogni $t \in T$ sia :

- $H(x,t) \in U_i$ se $x \in V$
- $H(x,t) = H(x,0)$ se $x \notin V$

Diremo che una omotopia $H : T \times [0,1] \to X$ è *costante* su $S \subset T$ se per $x \in S$ e $t \in [0,1]$ si ha $H(x,t) = H(x,0)$. Il *supporto* di H è l'insieme degli $x \in T$ che non hanno intorni su cui H è costante.

Se $\sigma : T \times [0,1] \to [0,1]$ è continua e tale che $\sigma(x,0) = 0$ e $\sigma(x,1) = 1$ per ogni $x \in T$, l'omotopia $H'(x,t) = H(x, \sigma(x,t))$ è detta una *riparametrizzazione* di H.

Lemma 21 *Sia $V \subset T$ un aperto relativamente compatto contenente il supporto Δ di una omotopia $H : T \times [0,1] \to X$. Allora una riparametrizzazione di H è il prodotto di un numero finito di omotopie elementari aventi supporto entro V.*

Dim. Esistono aperti $V_1, \ldots, V_r$ che ricoprono Δ ed un intero positivo m tali che per $i \in \{1, \ldots, r\}$ e per ogni intervallo $J \subset [0,1]$ di ampiezza non superiore a $1/m$ esista un elemento di $\mathcal{U}$ che contiene $H(V_i \times J)$. Aggiungendo $V_0 = T - \Delta$ si ha un ricoprimento aperto di T : sia $(\phi_i)_{i \in 0,\ldots,r}$ una partizione dell'unità associata. Le omotopie $H_i(x,t) = H(x, (\phi_1 + \ldots + \phi_{i-1} + t\phi_i)/m)$ per $i = 1, \ldots, r$ sono semplici hanno supporto in V ed il loro prodotto è una riparametrizzazione di H ristretta all'intervallo $[0, 1/m]$. Iterando m volte questo procedimento si conclude la dimostrazione.

Nel seguente teorema supporremo per semplicità che T sia uno spazio localmente compatto a base numerabile. Si può comunque estendere tale teorema ad altri spazi, quali i CW complessi (dotati come vedremo di una topologia opportuna).

Teorema 22 *Applicazioni omotope inducono fibrati isomorfi .*

Dim. Fissiamo su X un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ su cui E è banale. Per ipotesi T è unione di una famiglia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di compatti ognuno contenuto all'interno del successivo. Sia $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $(\overset{\circ}{K}_{n+1} - K_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$; si può quindi applicare il lemma precedente ed ottenere una famiglia di omotopie elementari che concatenano una successione di applicazioni continue $f_i : T \to X$ verificanti le seguenti proprietà:

– ogni f_n è contigua alla successiva

– per ogni compatto K di T , esiste un intero n_0 tale che f_n e f_m coincidono su K per ogni $n, m \geq n_0$.

– $f = f_0$ e g è la applicazione definita da $g(x) = f_n(x)$ per n sufficientemente grande.

Si ottiene così per ogni compatto K di T , un isomorfismo tra le restrizioni di $f^*(E)$ e $g^*(E)$ a K e tali isomorfismi si incollano tra loro dando l' isomorfismo asserito nell' enunciato.

Un fibrato $\phi : E \to X$ a fibra F può essere pensato come una famiglia di spazi omeomorfi ad F parametrizzata da X . Nel caso sia fissato un gruppo strutturale $\mathcal{G}$, si pensa che tali spazi siano riferiti ad F a meno di omeomorfismi in $\mathcal{G}$. Si noti l'analogia del passaggio da fibrati a fibrati con gruppo strutturale col passaggio da varietà topologiche a varietà differenziabili. Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ è detto *banalizzante* per il fibrato $\phi : E \to X$ se esso ha carte banalizzanti su ogni U_i (compatibili col gruppo strutturale). Per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq 0$, si hanno applicazioni $\sigma_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathcal{G}$ continue ; se $i, j, k \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq 0$ allora si ha $\sigma_{i,j} \circ \sigma_{j,k} = \sigma_{i,k}$. Viceversa assegnato un ricoprimento aperto di X e applicazioni $\sigma_{i,j}$ verificanti le relazioni di sopra , si possono incollare tramite esse ogni $U_i \times F$ con $U_j \times F$ su $(U_i \cap U_j) \times F$ ed ottenere un fibrato su X a fibra F e gruppo strutturale $\mathcal{G}$. Se si cambiano le banalizzazioni di E sugli U_i , si determinano applicazioni continue $\sigma_i : U_i \to \mathcal{G}$; le $\sigma_{i,j}$ di sopra cambieranno nelle $\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{i,j} \circ \sigma_j$.

Siano quindi fissati un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di uno spazio topologico X e un gruppo topologico $\mathcal{G}$. Chiamiamo *cociclo* su $\mathcal{U}$ a valori in $\mathcal{G}$ il dato per ogni coppia $i, j \in I$ per cui $U_i \cap U_j$ è non vuoto , di una applicazione continua $\sigma_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathcal{G}$ di modo che se $i, j, k \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap U_k$ è non vuoto su esso valga la relazione $\sigma_{i,j} \circ \sigma_{j,k} = \sigma_{i,k}$. Se $\sigma_i : U_i \to \mathcal{G}$ sono continue il cociclo $\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{i,j} \circ \sigma_j$ sarà detto equivalente a $\sigma_{i,j}$. Si ottiene così una relazione di equivalenza sull' insieme di tali cocicli: l'insieme quoziente sarà indicato con la notazione $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$; la discussione precedente dimostra che se è assegnata una azione continua di $\mathcal{G}$ su uno spazio topologico F , si ha una corrispondenza biunivoca naturale tra $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ e {fibrati su X a fibra F e gruppo strutturale $\mathcal{G}$ che sono banali sugli elementi di $\mathcal{U}$ } /modulo isomorfismo di fibrati. Si noti poi che se $\mathcal{V}$ è un ricoprimento più fine di $\mathcal{U}$ si ha una inclusione $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \subset \mathcal{H}^1(\mathcal{V},\mathcal{G})$; si può quindi definire $\mathcal{H}^1(X,\mathcal{G})$ che rappresenta i fibrati su X a fibra F e gruppo strutturale $\mathcal{G}$. Si noti che la fibra F non giuoca alcun ruolo : la classificazione dipende solo dal gruppo $\mathcal{G}$. Ogni gruppo topologico agisce su se stesso per traslazioni a sinistra : ogni tale fibrato è detto un *fibrato principale* ; nei problemi di classificazione ci si può restringere quindi a considerare fibrati principali . Una *sezione* su $Y \subset X$ di un fibrato $\phi : E \to X$ è una applicazione continua $\sigma : Y \to E$ tale che $\phi \circ \sigma$ = identità su Y. Se il fibrato è ottenuto incollando come descritto sopra $U_i \times F$ con $U_j \times F$ per mezzo di funzioni $\sigma_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathcal{G}$ (esse vengono di solito chiamate *funzioni di transizione*) , allora dare una sezione equivale ad assegnare applicazioni $s_i : U_i \to F$ continue e tali che su $U_i \cap U_j$, se non vuoto , si abbia $s_i = \sigma_{i,j} \circ s_j$. Ne segue che un fibrato principale è banale se e solo se ha una sezione .

E' chiaro che $H^1(X,\mathcal{G})$ è un funtore contravariante in X (categoria degli spazi topologici e applicazioni continue) e covariante in $\mathcal{G}$ (categoria dei gruppi topologici). Tale funtore è a valori nella categoria degli insiemi con punto base (il cociclo identità o se si preferisce il fibrato banale). Se $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi topologici, un fibrato su X a gruppo strutturale $\mathcal{G}$ è detto avere una riduzione del gruppo strutturale a $\mathcal{G}'$ se la classe che lo rappresenta in $\mathcal{H}^1(X,\mathcal{G})$ proviene da $\mathcal{H}^1(X,\mathcal{G}')$.

Si noti che nel caso $\mathcal{G}$ sia commutativo $\mathcal{H}^1(X,\mathcal{G})$ ha una struttura naturale di gruppo commutativo ; anzi restingendosi alla categoria dei gruppi topologici, si ottiene un funtore a valori nella categoria dei gruppi commutativi. Nessuna tale struttura esiste in generale se $\mathcal{G}$ non è commutativo ma qualche volta succede , come nel seguente caso : sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico; per ogni applicazione continua $\sigma : S^{n-1} \to \mathcal{G}$ si costruisce su $X = S^n$ un fibrato con gruppo strutturale $\mathcal{G}$ e fibra qualsiasi F su cui operi $\mathcal{G}$, incollando due copie di $D^n \times F$ (essendo $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$) lungo la parte sopra $\partial D^n = S^{n-1}$ tramite l'omeomorfismo $(s,f) \to (s,\sigma(s)[f]$. Si ottiene così una applicazione ν di $C^\circ(S^{n-1},\mathcal{G})$ in {fibrati su S^n con gruppo strutturale $\mathcal{G}$}. E' facile verificare il seguente :

Teorema 23 *Se $\mathcal{G}$ è connesso, l'applicazione ν identifica i fibrati (modulo isomorfismo) su S^n a gruppo strutturale $\mathcal{G}$ con il gruppo $\pi_{n-1}(\mathcal{G},1)$*

Fibrati vettoriali

Def. Un fibrato a fibra $F = \mathbb{R}^n$ e gruppo strutturale $\mathcal{G}l(n,\mathbb{R})$ è detto un *fibrato vettoriale di rango* n. Tutte le operazioni naturali tra spazi vettoriali definiscono analoghe operazioni tra i fibrati vettoriali su una stessa base X: esse possono essere facilmente definite considerando banalizzazioni comuni per i fibrati che si considerano. Si definiscono così i fibrati *somma diretta, prodotto tensoriale* etc. Alcune delle costruzioni che faremo utilizzano partizioni dell'unità ; supporremo quindi che le basi dei fibrati siano tutte spazi localmente compatti a base numerabile . In uno svolgimento completo della teoria comunque , si dovrebbero evidenziare i risultati validi per spazi più generali come i CW complessi non localmente finiti che giuocano un ruolo importante nei problemi di classificazione .

Siano $\phi : E \to X$, $\psi : F \to X$ fibrati vettoriali su X e sia $f : E \to F$ una applicazione continua tale che $\psi \circ f = \phi$; allora per ogni $x \in X$, f applica la fibra $E_x = \phi^{-1}(x)$ in $F_x = \psi^{-1}(x)$: indicheremo con f_x tale applicazione. Diremo che una tale f è un *morfismo* di fibrati vettoriali se ogni f_x è lineare. In tal caso scelto un intorno su cui E ed F si banalizzano , la f viene rappresentata sopra tale U da una applicazione di $U \times \mathbb{R}^n$ in $U \times \mathbb{R}^m$ del tipo $(x,v) \to (x, A(x)[v])$ ove $x \to A(x)$ è una applicazione continua di U nelle matrici ad m righe ed n colonne . Con facili considerazioni di algebra lineare si dimostra il seguente :

Lemma 24 *Se $f : E \to F$ è un morfismo di fibrati vettoriali di rango costante (ossia tutte le f_x hanno lo stesso rango) allora $Im(f)$ è un sottofibrato di F e $ker(f) = \{e \in E : f(e) = 0$ nella fibra cui appartiene$\}$ è un sottofibrato di E.*

Dim. Si possono cambiare le banalizzazioni locali (restringendo eventualmente l'aperto U) di modo che $A(x)$ sia costante...

Lemma 25 *Sia $\phi : E \to X$ un fibrato vettoriale e sia F un suo sottofibrato. Esiste allora un sottofibrato G di E tale che per ogni $x \in X$, G_x sia un supplementare di F_x in E_x. Si avrà quindi $E = F \oplus G$.*

Dim. Si costruisca su E un prodotto scalare definito positivo nel seguente modo : se $(U_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento localmente finito che banalizza E , si fissi una partizione dell'unità $(\phi_i)_{i\in I}$ ad esso subordinata e per ogni $x \in X$ si consideri su E_x la forma bilineare ottenuta facendo la media con pesi $\phi_i(x)$ dei prodotti scalari standard in prefissate banalizzazioni sugli U_i per $i \in I$. Allora G può essere costruito prendendo l'unione dei vari ortogonali a F_x in E_x al variare di x in X.

Diremo che un fibrato (vettoriale o di altro tipo) è di *tipo finito* se esso è banalizzabile su un ricoprimento finito. Ovviamente se uno spazio topologico X è compatto , ogni fibrato di base X è di tipo finito. Vediamo come tale conclusione sia ottenibile per spazi più generali descrivendo una idea di tipo combinatorio che va sotto il nome di *lemma di Nelson*. Spiegheremo dapprima tale idea nel caso (più geometricamente evidente) che X sia un poliedro di dimensione n basato su uno schema simpliciale localmente finito (K, I). Costruiamo W_0 come unione di piccoli intorni aperti dei vertici che siano a due a due disgiunti. Poi W_1 sia costruito con aperti uno per ogni 1-simplesso di K , a due a due disgiunti e tali che ognuno assieme a W_0 ricopra l'1-simplesso associato . Poi W_2 unione di aperti disgiunti uno per ogni 2-simplesso e che ricopra assieme ai W precedenti il 2-simplesso associato e così via. Si ottengono così $n + 1$ aperti che ricoprono X ed ognuno dei quali è unione disgiunta di aperti ognuno dei quali è piccolo nel senso ad esempio che è contenuto nella stella di qualche vertice , oppure nel senso che è contrattile . Si tenga presente questa descrizione per comprendere la seguente trattazione formale.

Diremo dimensione di un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico X, la dimensione dello schema simpliciale nerbo di $\mathcal{U}$. Diremo che X ha dimensione al più n se i suoi ricoprimenti aperti, localmente finiti, di dimensione minore o eguale ad n sono arbitrariamente fini.

Lemma 26 *Se X è uno spazio (localmente compatto a base numerabile) di dimensione minore o eguale ad n , ogni fibrato su X ha un ricoprimento banalizzante fatto con al più $n + 1$ aperti.*

Dim. Sia $(U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto banalizzante il fibrato su X e siano $(V_j)_{j\in J}$ un raffinamento localmente finito di dimensione minore o eguale ad n e $(\phi_j)_{j\in J}$ una partizione dell'unità subordinata. Per $N \subset J$ finito, poniamo $A_N = \{x \in X : \sup_{j\notin N} \phi_j(x) \le \inf_{j\in J} \phi_j(x)\}$. Ogni tale A_N è aperto, è contenuto in $\bigcap_{j\in N} V_j$ e quindi banalizza il fibrato dato. Se $x \in X$ allora $x \in A_N$ ove $N = \{j \in J : \phi_j(x) \neq 0\}$; quindi tali A_N costituiscono un ricoprimento aperto banalizzante il fibrato dato. L'ipotesi fatta sulla dimensione del ricoprimento assicura che se N ha più di $n + 1$ elementi allora A_N è vuoto. Mostreremo ora che se due sottoinsiemi N_1, N_2 di J hanno la stessa cardinalità e sono distinti, allora $A_{N_1} \cap A_{N_2} = \emptyset$; ne seguirà che prendendo $W_r =$ l'unione degli A_N quando $N \subset J$ ha r elementi , per $r = 1, \ldots, n + 1$, si ha il ricoprimento richiesto.
Siano $N_1, N_2 \subset J$ della stessa cardinalità (finita) e distinti. Esistono quindi $j_1 \in N_1 - N_2$ e $j_2 \in N_2 - N_1$. Se esistesse $x \in A_{N_1} \cap A_{N_2}$ si avrebbe $\phi_{j_1}(x) < \phi_{j_2(x)}$ e $\phi_{j_2}(x) < \phi_{j_1(x)}$ il che è assurdo.

Classi caratteristiche come ostruzioni

Sia $\phi : E \to X$ un fibrato vettoriale di rango n. Esso è banale se e solo se esistono n sue sezioni $s_1, \ldots, s_n$ che sono linearmente indipendenti in ogni punto $x \in X$; infatti in tal caso si ha un isomorfismo $h : X \times \mathbb{R}^n \to E$ definito da $(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \to \sum_1^n \lambda_i \cdot s_i$.

Più in generale (e nello stesso modo) si verifica il seguente :

Lemma 27 *Un fibrato vettoriale E possiede r sezioni $s_1, \ldots, s_r$ linearmente indipendenti in ogni punto di X se e solo se esso ha un sottofibrato banale di rango r.*

Indichiamo con $\varepsilon^r(X)$ il fibrato banale su X di rango r ; la tesi del precedente lemma può essere espressa anche nel seguente modo :

E è del tipo $\varepsilon^r(X) \oplus F$ ove F è un fibrato di rango opportuno.

Dato un fibrato vettoriale $\phi : E \to X$ di rango n , esaminiamo il problema dell'esistenza di r sezioni linearmente indipendenti. Supporremo per semplicità che X sia il poliedro associato ad uno schema simpliciale che supporremo, ancora per semplicità , localmente finito. Per $p \in \mathbb{N}$ sia X_p il $p-$scheletro di X ; cercheremo di costruire le sezioni per estenzioni successive da ogni X_p a X_{p+1} . La partenza, ossia r sezioni lineamente indipendenti su X_0 , non presenta problemi: basta che sia $r \leq n$. Supponiamo di essere riusciti a costruire le sezioni su X_p ; la estendibilità a X_{p+1} equivale alle estendibilità ai $(p+1)-$ simplessi di X ognuna di queste essendo totalmente indipendente dalle altre. Sia quindi T il supporto geometrico di un $(p+1)-$ simplesso Δ di X. Essendo T contrattile, E è banale su esso, quindi $E \simeq X \times \mathbb{R}^n$. Indicando con $\mathcal{F}_r(n)$ l'insieme delle matrici ad n righe ed r colonne aventi rango r , le sezioni costruite su X_p danno una applicazione continua $\sigma_T : \partial T \to \mathcal{F}_r(n)$; la coppia $(T, \partial T)$ essendo omeomorfa alla coppia D^n, S^{n-1} , si ottiene che σ_T induce un elemento α_T di $\pi_1(\mathcal{F}_r(n))$ (c'e qualche problema col punto base) e la estendibilità di σ_T a T è equivalente all'annullarsi di α_T.

Supponiamo di aver fissato un omomorfismo h di $\pi_1(\mathcal{F}_r(n)$ in un gruppo abeliano G che non dipenda dalle scelte fatte (la banalizzazione di E su T e la scelta del punto base). Associando al $(p+1)-$simplesso (orientato) Δ l'elemento $h(\sigma_T)$ di G si ha una $(p+1)-$cocatena (simpliciale) su X a coefficienti in G che indichiamo con W_{p+1} . Essa dipende evidentemente dalla scelta delle sezioni di E su X_p da cui siamo partiti . Si verifica che:

– W_{p+1} è un cociclo

– ogni W'_{p+1} ottenuta a partire da un'altra scelta di sezioni su X_p , differisce da W_{p+1} per un cobordo.

Risulta quindi ben definito un elemento in $H^{p+1}(X, G)$ il cui annullarsi è condizione necessaria per l'esistenza di r sezioni linearmente indipendenti di E sul $(p+1)-$scheletro di X ; ci si riferisce ad un tale elemento con l'appellativo *classe ostruttiva* , cui può essere aggiunto la parola *secondaria* in considerazione del fatto che essa è definita solo se siamo già riusciti a costruire le sezioni sul $p-$scheletro. Mostreremo più avanti che i gruppi $\pi_i(\mathcal{F}_r(n))$ sono nulli per $i < n - r$ ed esiste un omomorfismo naturale $h : \pi_{n-r}(\mathcal{F}_r(n) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ne risulta ben definita una classe ostruttiva (primaria) in $H^{n-r+1}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ che è detta classe di Stiefel-Whitney e viene indicata $w_{n-r+1}(E)$.

Diremo che un fibrato vettoriale $E \to X$ è *orientato* se è stata fissata una orientazione per tutte le sue fibre di modo che ogni $x \in X$ appartenga ad un aperto sul quale esiste una banalizzazione che trasporta tali orientazioni nell'orientazione standard di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 28 *Un fibrato vettoriale E è orientabile (possiede qualche orientazione) se e solo se la sua prima classe caratteristica di Stiefel Whitney $w_1(E)$ è nulla.*

Dim. Basta osservare che l'orientabilità di E equivale all'essere E banale sullo scheletro di dimensione uno e riesaminare la costruzione delle classi ostruttive descritta sopra.

Sia ora $E \to X$ un fibrato vettoriale orientato di dimensione n. L'ostruzione alla costruzione di una sezione non nulla di E è una classe di coomologia di dimensione n con coefficienti che possono essere presi in $\mathbb{Z}$ (perchè $\mathcal{F}_1(n)$ ha il tipo di omotopia di S^{n-1} e il generatore positivo di $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ è canonicamente fissato dall'orientazione delle fibre di E). Tale classe $e(E) \in H^n(X, \mathbb{Z})$ viene detta *classe di Eulero* di E.

Teorema 29 *Sia $\phi : E \to X$ un fibrato vettoriale orientato di rango due. Esso è banale se e solo se la sua classe di Eulero è nulla.*

Dim. Siccome E è orientato si ha una riduzione del suo gruppo di struttura a $\mathcal{G}l^+(\mathbb{R}, 2)$ che ha il tipo di omotopia di S^1 (od anche : introducendo una metrica su E si ha una riduzione del gruppo strutturale a $SO(2) \simeq S^1$; siccome S^1 ha tutti i gruppi di omotopia nulli salvo il primo , le ostruzioni successive sono tutte nulle cosicchè E ha una sezione s_1 mai nulla su tutto$X$. Un'altra sezione s_2 viene poi determinata chiedendo che per ogni $x \in X$, $s_2(x)$ abbia modulo uno e sia ortogonale a $s_1(x)$, rispetto ad un prodotto scalare prefissato su E. Quindi E avendo due sezioni linearmente indipendenti è banale.

Come abbiamo osservato avanti i fibrati vettoriali di rango 2 su X ammettono tutti una riduzione del gruppo strutturale a S^1 ; quindi l'insieme delle classi di equivalenza di fibrati vettoriali orientati di rango 2 su X coincide con $\mathcal{H}^1(X, S^1)$ e questo è un gruppo essendo S^1 abeliano. Il teorema precedente asserisce che la classe di Eulero $e : \mathcal{H}^1(X, S^1) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ ha per fibra sopra lo zero solo la classe del fibrato banale . Si può dire di più:

Teorema 30 *la classe di Eulero $e : \mathcal{H}^1(X, S^1) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ è un isomorfismo di gruppi abeliani.*

Dim. Che è un omomorfismo è una facile verifica diretta , anche se un pò laboriosa . La iniettività segue allora dal teorema precedente . Per la surgettività , dato un elemento in $H^2(X, \mathbb{Z})$, sia $n_{i,j,k}$ un cociclo (simpliciale) che lo rappresenta . Scelta una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento di X dato dalle stelle dei suoi vertici , si definisca per $i, j \in I$ tali che $St(i) \cap St(j) \neq \emptyset$ una applicazione $g_{i,j} : St(i) \cap St(j) \to \mathbb{R}$ con la formula

$$g_{i,j}(x) = \sum_{h \in I} n_{i,j,h} \cdot \phi_h$$

Per $i, j, k \in I$ su $St(i) \cap St(j) \cap St(k)$, se non vuoto , si ha la relazione :

$$g_{i,j} \cdot g_{j,k} = g_{i,k} + n_{i,j,k}$$

Definendo le $f_{i,j} : St(i) \cap St(j) \to S^1$ con la formula $f_{i,j} = e^{2\pi g_{i,j}}$ si ottiene quindi un cociclo a valori in S^1 al quale è associato un fibrato orientato E di rango due su X : si verifica direttamente che la classe di Eulero di E è proprio il cociclo $(n_{i,j,k})$ da cui si era partiti.

L'analogo del teorema precedente per fibrati di rango uno è il seguente:

Teorema 31 *Per ogni spazio X che è un poliedro (basterebbe connesso per archi), la prima classe di Stiefel Whitney induce un isomorfismo tra {fibrati vettoriali di rango uno }/isomorfismo e $H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Dim. Il gruppo strutturale dei fibrati vettoriali di rango uno è $\mathbb{R}^*$ che è un gruppo commutativo; si osservi dapprima che $w_1 : \mathcal{H}^1(X, \mathbb{R}^*) \to H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è un omomorfismo di gruppi. Per un teorema precedente tale mappa è quindi iniettiva. Per mostrare la surgettività, si interpreti ogni $1-$cociclo simpliciale $(f_{i,j})_{i\in I}$ a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ come un sistema di funzioni di transizione sul ricoprimento $(St(i))_{i\in I}$ di X : è chiaro che il fibrato definito da tale cociclo ha per classe di Stiefel Whitney la classe di coomologia data dalle $(f_{i,j})$.

La formula data dal seguente teorema è il pezzo facile di una formula generale cui accenneremo in seguito; la dimostrazione si fa semplicemente ripercorrendo la costruzione di w_1:

Teorema 32 *Siano E_1, E_2 due fibrati vettoriali di rango qualsiasi su uno spazio X. Si ha $w_1(E_1 \oplus E_2) = w_1(E_1) + w_1(E_2)$.*

Corollario 33 *Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale. Esiste uno ed un sol fibrato vettoriale L di rango uno tale che $E \oplus L$ sia orientabile.*

Dim. Dovrà essere $w_1(E) + w_1(L) = 0$ ed essendo in caratteristica due ciò significa $w_1(L) = w_1(E)$. Per un teorema precedente esiste esattamente un fibrato con tale condizione.

Teorema 34 *Sia $E \to X$ un fibrato di rango tre . Si ha :*
- *Se E è banale sul $2-$scheletro allora è banale anche sul $3-$scheletro*
- *E è banale sul $2-$scheletro se e solo se $w_1(E)$ e $w_2(E)$ sono nulli.*

Dim. Se E è banale su X_2 allora E è orientabile e quindi il gruppo di struttura è riducibile a $SO(3)$. Essendo $SO(3)$ omeomorfo a $\mathbb{P}^3$ si ha $\pi_2(SO(3)) \simeq 0$ e quindi ogni banalizzazione su X_2 si estende ad una banalizzazione su X_3. Ciò dimostra la prima asserzione . Per la seconda si osserva anzitutto che se $w_1(E) = 0$ allora E è orientabile e quindi E è banalizzabile su X_1 ; l'ostruzione ad estendere una tale banalizzazione a X_2 è esattamente $w_2(E)$ perchè $\pi_1(SO(3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Varietà parallelizzabili

Una varietà differenziabile X è detta parallelizzabile se il suo fibrato tangente è banale. Una condizione necessaria affinche ciò avvenga è la orientabilità di X.

Teorema 35 *Sia X una varietà differenziabile orientata e connessa di dimensione due . Se non è compatta è parallelizzabile . Se è compatta è parallelizzabile se e solo se è il toro $S^1 \times S^1$.*

Dim. Per un fibrato orientato di rango due , l'esistenza di una sezione non nulla implica che il fibrato è banale. Basterà quindi determinare quando $e(X) = 0$. Se X è non compatta (e connessa) si può dimostrare che essa è deformabile (retratto forte di deformazone) in un suo sottocomplesso di dimensione uno; quindi $e(X) = 0$ perchè $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$. Ciò è facile da verificare se X è una superficie (poliedrale) compatta connessa a bordo non vuoto: si collassa un triangolo con un lato sul bordo sugli altri due lati e si continua così finchè tutti i triangoli sono eliminati. Nel caso X sia infinita ciò è più complicato . Si può allora dimostrare direttamente l'esistenza di una sezione non nulla nel modo seguente: si costruisca prima una sezione non nulla sullo scheletro di dimensione uno di X e la si estenda poi ad ogni triangolo con al più uno zero nel baricentro di questo. Se due triangoli T_1, T_2 sono adiacenti, modificando la sezione solo all'interno del quadrilatero costituito dalla loro unione si può eliminare lo zero su T_1 complicando il tipo di zero nel baricentro di T_2 . Poi si può passare da T_2 ad un triangolo adiacente T_3 e così via . Sembra chiaro come si possa costruire una successione di sezioni s_n del fibrato tali che per ogni compatto T (sottopoliedro finito) di X esista n_0 tale che tutte le sezioni s_n con $n \geq n_0$ coincidano su T e siano ivi prive di zeri : esse definiranno quindi una sezione senza zeri su X. In effetti è un pò più complicato di quel che può apparire a prima vista perchè si deve escludere di dover ripassare dove si vuole che la sezione rimanga invariata (l'idea per evitare ciò è di riempire via via le componenti connesse compatte del complementare). In questa dimostrazione il fatto che il fibrato in questione sia il fibrato tangente di X è irrilevante ; si è quindi dimostrato che su una tale X ogni fibrato vettoriale orientato di rango due è banale. In realtà il ragionamento seguito può essere utilizzato per dimostrare che $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$. Sia infatti ω un $2-$cociclo (simpliciale) su X ; se due triangoli hanno un lato l in comune , detta α la $1-$cocatena che vale 1 su l e 0 su tutti gli altri $1-$simplessi, la $2-$cocatena $\delta(\alpha)$ vale 1 o -1 (dipende dalle orientazioni fissate) sui due triangoli; quindi aggiungendo ad ω il differenziale di un opportuno multiplo di α si ha un $2-$cociclo coomologo ad ω e nullo sul primo triangolo. Continuando così (analogamente a sopra) si ottiene infine una primitiva di ω.

Esaminiamo adesso il caso che X sia compatta. Costruiamo sul $2-$simplesso standard un campo di vettori tangenti nullo sui tre vertici, nei baricentri dei suoi lati, nel proprio baricentro e senza altri zeri; richiediamo inoltre che su ogni lato sia tangente al lato e che tale campo sia, ristretto ad ogni faccia, una sorgente. Trasportando su ogni triangolo di una superficie tale campo si ottiene un campo di vettori tangenti perchè si incollano tra loro. Ci si può convincere (e con un pò di manipolazioni sulle triangolazioni anche dimostrare) che la classe di Eulero $e(T(X))$ (che conta gli zeri di una sezione) vale esattamente la caratteristica di Eulero-Poincarè di X ; precisamente si verifica (stesso ragionamento fatto per le superficie non compatte) che $H^2(X, \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ tramite l'applicazione $\omega \to \int_X \omega$ e che $\int_X e(T(X)) = \chi(X)$

Nota: lo stesso modo di costruire un campo di vettori tangenti funziona anche in dimensione maggiore di due e dimostra che il numero di zeri di un qualsiasi tale campo dà la caratteristica di Eulero-Poincarè della varietà; anzi il modo descritto di spostare gli zeri di una sezione dimostra che se $\chi(X) = 0$, esiste un campo di vettori tangenti ad X senza alcuno zero.

Teorema 36 *Ogni varietà orientata di dimensione tre è parallelizzabile.*

Dim. Sia X la varietà di dimensione tre in questione e sia $E = T(X)$ il suo fibrato tangente. Per un teorema precedente E è banale se e solo se $w_2(E) = 0$. Siccome quando i coefficienti sono in un corpo la coomologia è il duale della omologia, basterà mostrare che per ogni classe $\Delta \in H_2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si ha $\int_\Delta w_2(E) = 0$.

Dimostreremo ciò con i seguenti tre passi :

(1) (naturalità delle classi caratteristiche) Se $E' \to T$ è il fibrato indotto da una $f : T \to X$ continua, allora $w_2(E') = f^* w_2(E)$.

(2) (rapprersentabilità di classi di omologia con sottovarietà) Per ogni $w \in H_2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ esiste una sottovarietà $T \subset X$ di dimensione due tale che w appartiene all'immagine di $H_2(T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_2(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(3) per ogni sottovarietà $T \subset X$ di dimensione due, E è banale su T.

Il passo (1) è un controllo diretto la cui unica complessità risiede nel richiamare le definizioni di fibrato indotto e classe di ostruzione; è comunque del tutto banale nel caso che f sia una inclusione , unico caso in cui useremo qui il punto (1).

Il punto (2) si può dimostrare direttamente così : essendo i coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, una due catena simpliciale Δ (non una classe, ma un suo rappresentante), è semplicemente un insieme di due simplessi la cui unione è un sottocomplesso dello schema di dimensione tre in cui stiamo operando (quello che dà ad X la sua struttura poliedrale). Quel che asseriamo è che ogni classe di $2-$omologia di X è rappresentabile, eventualmente in qualche suddivisione dello schema, da un ciclo il cui sottocomplesso associato è

una superficie (non so se sia effettivamente necessario passare ad una suddivisione dello schema per ottenere ciò, ma mi aspetterei di si, salvo supporre che lo schema sia ottenuto come suddivisione baricentrica di uno schema, nel qual caso non si dovrebbero avere problemi a rappresentare la classe direttamente nello schema di partenza). Sia quindi Δ il sottocomplesso associato al dato ciclo. Si procede eliminando prima le singolarità di dimensione uno: se l è un $1-$simplesso, il numero di triangoli che si appoggiano ad esso è pari perchè Δ è un ciclo. Se ve ne sono due o nessuno non si hanno singolarità lungo l; altrimenti, ordinandoli ciclicamente ed accoppiandoli in gruppi di due successivi, si possono staccare dalla parte interna di l operando in $St(l)$. Questo può essere ripetuto per ogni $1-$simplesso dello schema originario ed alla fine Δ presenterà solo singolarità nei vertici. Queste sono parimenti eliminabili operando negli $St(v)$ quando v è un vertice dello schema originario.
Il punto (3) si dimostra osservando che se S è una superficie in una $3-$varietà X un suo intorno (tubolare) è diffeomorfo allo spazio totale del fibrato normale L di S in X. Essendo $T(X)|_S \simeq T(S) \oplus L$ si ha che (corollario 14) tale L è univocamente determinato dalla condizione che X sia parallelizzabile. Quindi basterà mostrare che ogni superficie compatta S è sottovarietà di qualche $3-$varietà parallelizzabile. Ciò è ovvio per le superficie orientabili. Osservato che $\mathbb{P}^3 \simeq SO(3)$ essendo un gruppo è parallelizzabile, anche $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ è sottovarietà di una $3-$varietà parallelizzabile. Si osservi adesso che se una superficie è sottovarietà di una $3-$varietà X anche la sua somma connessa con $S^1 \times S^1$ lo è (si modifica la superficie solo in un piccolo intorno di un punto di essa); per la classificazione delle superficie compatte resta quindi solo da mostrare che la bottiglia di Klein K è sottovarietà di qualche $3-$varietà parallelizzabile. Esibiremo una tale $3-$varietà come lo spazio totale di un fibrato vettoriale F di rango uno su K in cui K è identificata tramite la sezione nulla. Essendo F contrattile su K , la banalità del fibrato tangente a F equivale alla sua banalità su K. Essendo $T(F)|_K \simeq T(K) \oplus F$ il problema è ricondotto a quello di trovare un fibrato F di rango uno tale che $T(K) \oplus F$ sia banale. Ora il fibrato tangente $T(K) \to K$ ha una sezione non nulla ; essa definisce una decomposizione $T(K) \simeq E \oplus F$ ove E, F sono fibrati di rango uno con E banale e F il fibrato indotto da quello non banale su S^1 per la proiezione $K \to S^1$ che definisce la bottiglia di Klein K. Ne segue che F ha due sezioni s_1, s_2 senza zeri comuni. Detta s_0 una sezione non nulla del fibrato banale E , si ha che $T(K) \oplus F \simeq E \oplus F \oplus F$ ha due sezioni $(s_0, 0, 0)$
e $(0, s_1, s_2)$ linearmente indipendenti in ogni punto ; essendo orientabile perchè $w_1(E \oplus F \oplus F) = w_1(F) + w_1(F) = 0$, esso è banale.

Classi caratteristiche come luoghi di degenerazione

La teoria delle classi caratteristiche dei fibrati si è sviluppata storicamente nell'ambito della geometria algebrica , prima che la coomologia fosse definita; anzi essa era spesso trattata indipendentemente da riferimenti alla omologia od altre nozioni topologiche. Nel caso ad esempio dei fibrati vettoriali, l'idea era quella di valutare quanto un fibrato $E \to X$ è banale, prendendo sezioni generiche $s_1, s_2, \ldots$ di E e di considerare gli insiemi $\Delta_1 =$ luogo di zeri di s_1, $\Delta_2 =$ luogo dei punti ove s_1 e s_2 sono linearmente indipendenti,...

Ciò funzionava perchè le sezioni erano supposte non solo continue (o differenziabili, il chè non avrebbe migliorato molto le cose) ma algebriche, il che comportava che gli insiemi Δ_i erano insiemi tra i quali erano possibili buone teorie dell'intersezione (rispetto a varie relazioni di equivalenza introducibili sul gruppo dei *cicli virtuali* = gruppo libero abeliano costruito su essi). Ciò potrebbe essere fatto anche nel caso topologico (o differenziabile) studiando le singolarità dello spazio delle matrici a r righe ed n colonne ed aventi rango minore o eguale a p e definendo nozioni di trasversalità che assicurino che i Δ_i di sopra abbiano al più singolarità di tale tipo. Nel caso poliedrale ciò è ottenibile con poche modifiche a quanto svolto nel paragrafo precedente.

Altri modi di introdurre le classi caratteristiche

Oggi si dà volentieri la preferenza a metodi più formali di introdurre le classi caratteristiche. Accenniamo qui a due di esse:

Metodo assiomatico. Una teoria delle classi caratteristiche (ad esempio per fibrati vettoriali su $\mathbb{R}$) presuppone di aver fissato:

– una categoria di spazi in cui prendere le basi dei fibrati (spazi localmente compatti, CW complessi, varietà...)

– una teoria coomologica su essa (ad esempio lavorando in una categoria topologica , si può scegliere la coomologia singolare a coefficienti in un determinato anello; oppure una teoria coomologica caratterizzata eventualmente anch'essa in modo assiomatico)

– per ogni fibrato $E \to X$, una classe (o più) $\gamma(E) \in H^*(X)$ che sia data in modo naturale: ossia per ogni morfismo $f : T \to X$ si vuole che $\gamma(f^*(E) = f^*(\gamma(E))$ (le due f^* in tale eguaglianza indicano cose diverse: a sinistra opera sui fibrati, a destra sulle classi di coomologia).

Si richiede poi che certe proprietà (formule) siano soddisfatte e si fa in modo che queste siano abbastanza da caratterizzare γ come l'unica che le soddisfa tutte. Le dimostrazioni di esistenza e unicità di tali teorie sono ovviamente scelte in base al criterio della massima concisione ma, seppure esse siano spesso brillanti, danno quasi sempre molte meno informazioni di quelle ottenibili costruendo le teorie nel modo classico, magari più lungo e farraginoso ma proprio per questo più esemplicativo. I due modi di procedere dovrebbero in realtà essere considerati complementari ; l'uno dal particolare all'universale, l'altro in senso inverso: la giovinezza e la maturità del pensiero scientifico ed in qualche misura anche la fecondità e l'aridità di esso.

Se T è uno spazio, indichiamo con $Vect(T)$ l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali su T. Su tale insieme sono definiti una somma ed un prodotto: per $E_1, E_2 \in Vect(T)$ si considerino $E_1 \oplus E_2$ e $E_1 \otimes E_2$. Tali operazioni sono associative, commutative, il prodotto è distributivo rispetto alla somma e esistono unità moltiplicativa (il fibrato $T \times \mathbb{R}$) e additiva (il fibrato $T \times \{0\}$) ; insomma per essere un anello gli manca solo l'esistenza dell'opposto degli elementi rispetto alla somma. Potremmo chiamare un tale oggetto algebrico *semianello*; così ad esempio $\mathbb{N}$ è un semianello. Si può, nello stesso modo in cui da $\mathbb{N}$ si passa a $\mathbb{Z}$ costruire un anello a partire da $Vect(T)$ che qui di seguito indicheremo con $Wect(T)$; si ha coì un funtore sulla categoria degli spazi fissati (localmente compatti o CW complessi o...) a valori nella categoria degli anelli . Siccome fissato un anello R anche il funtore $H^*(\ ,\mathrm{R})$ è un funtore a valori nella categoria degli anelli , si possono studiare le trasformazioni naturali (di funtori) : $Wect(\ ) \to H^*(\ , R)$.

Così il funtore $Wect(\ )$ viene ad essere considerato un funtore coomologico alla stessa stregua di $H^*(\ , R)$ e le teorie delle classi caratteristiche vengono pensate come applicazioni di tipo particolare (cioè verificanti certe formule) tra teorie coomologiche, riferite infine ad omomorfismi (trasformazioni naturali) tra esse.

Metodo degli spazi classificanti. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango n. Per ogni spazio T associando alla classe di omotopia di una $f : T \to X$ continua il fibrato $f^*(E)$ si ha una applicazione :

$[T, X] \to \{$ fibrati vettoriali di rango n su $T\}$/isomorfimo

Diremo che $E \to X$ è *universale* se tale applicazione è biunivoca per ogni spazio T. Se restringiamo tale richiesta ai soli spazi T che hanno dimensione minore o eguale ad r si parlerà di fibrato $r-$universale. Ad esempio sia $X = \mathbb{P}^n$ e sia $E = \{(x;t) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{P}^n :$ x e t sono proporzionali$\}$. Si dimostra che questo fibrato di rango uno (che è detto *tautologico* per ragioni del tutto evidenti se si riflette a cosa è $\mathbb{P}^n$) è $r-$universale per n sufficientemente alto. Si ottiene un fibrato di rango uno universale se si costruisce l'analogo di esso per $\mathbb{P}^\infty$ (definito in modo opportuno come limite dei $\mathbb{P}^n$). E' chiaro allora che tutti i modi di associare in modo naturale ai fibrati vettoriali (di rango uno) una classe di coomologia dello spazio base consistono semplicemente nello scegliere tale classe per il fibrato tautologico, ossia nello scegliere semplicemente una classe di coomologia in $\mathbb{P}^n$. Analogamente per i fibrati vettoriali di rango p, si costruisce sulla grassmanniana $\mathbb{G}(p, n)$ dei $p-$piani in $\mathbb{R}^n$, un fibrato *tautologico* di rango p che è $r-$universale per n sufficientemente alto; ancora sarà universale uno spazio $\mathbb{G}^\infty(p)$ limite (in un senso da precisare) dei $\mathbb{G}(p, n)$. Ne segue che per costruire teorie di classi caratteristiche per fibrati vettoriali occorre e basta conoscere i moduli di coomologia $H^q(\mathbb{G}^\infty(p))$ il che equivale poi a conoscere gli $H^q(\mathbb{G}(p, n)$ per n grande rispetto a q. Per ovvie ragioni si dice che $\mathbb{G}^\infty(p)$ è uno *spazio classificante* per il gruppo $\mathcal{G}l(p, \mathbb{R})$.