Periodi simultanei

(F.Lazzeri; Pisa, ottobre 1998)

Introduzione Siano X una varietà differenziabile connessa, $x_0 \in X$ ed ω una 1-forma chiusa su X. Se X è semplicemente connessa, esiste una primitiva $f : X \to \mathbb{R}$ di ω con $f(x_0) = 0$; tale f può essere costruita così : per ogni $x \in X$, $f(x) = \int_\gamma \omega$ ove γ è un qualsiasi cammino differenziabile da x_0 ad x. Esaminiamo il caso $\pi_1(X, x_0) \neq 0$. Sia $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x)$ il rivestimento universale di X. Allora $\tilde{\omega} = \phi^*\omega$ è chiusa in $\tilde{X}$ ed esiste quindi una $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = 0$ e $d\tilde{f} = \tilde{\omega}$.
Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ opera su $\tilde{X}$ come gruppo di omeomorfismi; si ha inoltre un omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ definito da $\sigma(\gamma) = \int_\gamma \omega$ e si ha $\tilde{f}(\gamma x) = \tilde{f}(x) + \sigma(\gamma)$. Il sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ dato dall'immagine di σ è detto *gruppo dei periodi* di ω; se esso è nullo, $\tilde{f}$ è invariante per l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ e definisce quindi una primitiva di $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x_0) = 0$. Supponiamo che il sottogruppo dei periodi di ω sia discreto non nullo: ossia che esso sia l'insieme dei multipli interi di un $a \in \mathbb{R}$. Allora, posto $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \simeq S^1$ si ha una unica $f : X \to S^1$ con $f(x_0) = 1$ e $f \circ \phi = \tau\tilde{f}$ che può essere chiamata un *potenziale circolare* di ω. Tale f soddisfa la seguente proprietà: se $d\theta$ è la 1-forma su S^1 invariante per traslazioni e tale che $\int_{S^1} d\theta = 1$ allora $\omega = a \cdot f^*(d\theta)$. L'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ si fattorizza quindi così :

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

ove λ è la moltiplicazione per a.

Ma in generale il sottogruppo dei periodi di ω non è discreto in $\mathbb{R}$. Ad esempio per $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $\omega = dx_1 + \sqrt{2}dx_2$, il sottogruppo dei periodi è il gruppo Γ generato in $\mathbb{R}$ da 1 e $\sqrt{2}$ che è denso in $\mathbb{R}$. Il quoziente $\mathbb{R}/\Gamma$ non ha quindi strutture geometriche naturali (ad esempio la sua topologia quoziente è quella banale). Si prova allora a rifare quanto precede simultaneamente per più forme: siano $\omega_1, \ldots, \omega_r$ assegnate 1-forme chiuse sulla varietà connessa X; si ha allora una applicazione differenziabile $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r) : \tilde{X} \to \mathbb{R}^r$ tale che $\tilde{f}(x_0) = 0$ e $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r)$ ove $\tilde{\omega}_i = \phi^*\omega_i$.

Si considera ora l'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}^r$ definito da

$$\sigma(\gamma) = \begin{pmatrix} \int_\gamma \omega_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \omega_r \end{pmatrix}$$

che ha come immagine in $\mathbb{R}^r$ un sottogruppo Γ che verrà detto *gruppo dei periodi simultanei* di $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Se Γ è discreto in $\mathbb{R}^r$, allora $\mathbb{R}^r/\Gamma$ è una varietà differenziabile (diffeomorfa al prodotto $(S^1)^h \times \mathbb{R}^{r-h}$ ove h è il rango di Γ) e si costruisce come sopra una $f : X \to \mathbb{R}^r/\Gamma$ con $f(x_0) = 0$ e $f^*(dx_i) = \omega_i$ per $i = 1, \ldots, r$ (ove $x_1, \ldots, x_r$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^r$).

Dimostreremo che se le ω_i sono in numero sufficiente (inducono generatori della coomologia delle 1−forme) tale gruppon di periodi è discreto; esso è inoltre di rango massimo se le forme non sono troppe (inducono una base della coomologia delle $1-$forme). L'integrazione di esse fornisce una applicazione differenziabile in un toro $T^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, che classifica in un senso che sarà precisato le classi di omotopia di applicazioni differenziabili di X in gruppi di Lie abeliani (quozienti di un $\mathbb{R}^m$ per un sottogruppo discreto).

Nel primo paragrafo si esamina un caso particolare in cui ciò accade che è sostanzialmente modellato sul cosidetto metodo di inversione degli *integrali ellittici*. Questo paragrafo contiene in nota un richiamo sulla nozione di rivestimento. Per questioni del tipo che trattiamo qui è infatti preferibile pensarli in un modo un pò diverso da come usualmente vengono introdotti; questo modo è d'altra parte sostanzialmente quello che veniva usato nelle questioni di prolungamento in Teoria delle Funzioni.

Nel secondo utilizziamo una descrizione "formale" del gruppo fondamentale basata sull'uso di buoni ricoprimenti che permetterà nel paragrafo successivo di riportare una semplice dimostrazione del teorema di de Rham descrivente lo spazio di coomologia delle $1-$forme come lo spazio degli omomorfismi del π_1 in $\mathbb{R}$. Nel quarto paragrafo si dimostra che il gruppo dei periodi simultanei è discreto di rango massimo se le forme date inducono una base della coomologia e si dimostra il teorema di classificazione.

1. Un teorema di inversione La situazione descritta nel teorema che segue è ispirata dal metodo classico sull'inversione degli integrali di forme olomorfe una descrizione del quale può essere trovata in [L2].

Teorema 1 *Sia X una varietà differenziabile connessa e compatta di dimensione n e siano $\omega_1, \dots \omega_n$ 1-forme chiuse su X tali che per ogni $x \in X$, $\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ siano una base del duale di $T_x(X)$. Allora il gruppo Γ dei periodi è discreto di rango n e l'applicazione f da X nel toro n-dimensionale $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ottenuta integrando le 1-forme date è un diffeomorfismo.*

Dim. Consideriamo come sopra l'applicazione $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^n$ ottenuta integrando le $\tilde{\omega}_i = \phi^*(\omega_i)$ sul rivestimento universale $\phi : \tilde{X} \to X$ a partire dal punto base $\tilde{x}_0$. Mostreremo che essa è un rivestimento: essendo $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessa ne seguirà che essa è un diffeomorfismo. Per dimostrare che è un rivestimento mostreremo il fatto seguente (vedi la nota che segue la dimostrazione) che per semplicità di esposizione sarà formulato in termini di una metrica su X compatibile con la sua topologia (ad esempio quella indotta da una sua realizzazione come sottovarietà di $\mathbb{R}^n$):

- $\tilde{f}$ è localmente invertibile in modo uniforme nel senso che esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in \tilde{X}$, $\tilde{f}$ induce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di x in $\tilde{X}$ ed un aperto contenente la palla di centro $\tilde{f}(x)$ e raggio r in X.

Ed infatti $\tilde{f}$ è un diffeomorfismo locale perché $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)$ è per ipotesi unisomorfismo tra $T_x(\tilde{X})$ e $\mathbb{R}^n$. Inoltre in due punti aventi la stessa proiezione su X , $\tilde{f}$ differisce di una costante additiva e dà quindi la stessa *copertura* dell'immagine in $\mathbb{R}^n$; essendo X compatta si deduce l'esistenza di un $r > 0$ come richesto.

Resta da verificare che nel rivestimento $\tilde{f}^{-1} \circ \phi : \mathbb{R}^n \to X$, due punti di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa immagine in X se e solo se differiscono per un elemento di Γ. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ con la stessa immagine $x$in X; quindi provengono da punti $a, b \in \tilde{X}$ che si proiettano in x. Sia γ un cammino continuo in $\tilde{X}$ da a a b e sia

$\bar{\gamma}$ la sua immagine in X; i valori α, β di $\tilde{f}$ in a, b differiscono per

$$\alpha - \beta = \begin{pmatrix} \int_\gamma \tilde{\omega}_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \tilde{\omega}_n \end{pmatrix}$$

Essendo $\int_\gamma \tilde{\omega}_i = \int_{\bar{\gamma}} \omega_i$ per tutti gli i, tale differenza è uno dei periodi simultanei. Siano ora $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Gamma$ e $a, b \in \tilde{X}$ le controimmagini tramite $\tilde{f}$ di α e $\alpha + \lambda$. Dobbiamo mostrare che a e b hanno la stessa proiezione in X. Sia λ ottenuto integrando le ω_i su un cammino chiuso γ che possiamo prendere di origine $\phi(a)$. Rilevando γ in $\tilde{X}$ a partire da a, si terminerà in un punto a' che ha la stessa immagine di a in X. Siccome il valore di $\tilde{f}$ in a' differisce come b da quello in a ed $\tilde{f}$ è iniettiva, si ha $a' = b$ e quindi a e b hanno la stessa immagine in X.
Il fatto che Γ è discreto di rango massimo deriva dal fatto che X è di Hausdorff e compatta.

Nota. Ogni spazio topologico di cui si parlerà in questa nota sarà supposto di Hausdorff, localmente contrattile (ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni che sono contrattili) e metrico, anche se gran parte di queste condizioni sono sovrabbondanti per i risultati che otterremo.

La nozione di rivestimento può essere introdotta in tre modi equivalenti; alla base di tutti c'è una applicazione continua $\phi : X \to Y$ tra spazi topologici connessi che è localmente invertibile nel senso che :

($\sharp$) ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che $V = \phi(U)$ è aperto in Y e ϕ dà un omeomorfismo tra U e V.

Una *sezione* di ϕ su un sottoinsieme $V \subset Y$ è una applicazione continua $s : V \to X$ tale che $\phi \circ s$ sia l'identità su V. Se la ($\sharp$) è valida, l'insieme dei punti ove due sezioni di ϕ su V coincidono è aperto e chiuso in V quindi vuoto o tutto V nel caso questo sia connesso.

Def. Una applicazione ϕ come sopra è detta un *rivestimento* se una delle seguenti condizioni equivalenti è verificata:
1) ogni $y \in Y$ ha un intorno connesso V tale che $\phi^{-1}(V)$ sia l'unione (necessariamente disgiunta per quanto osservato sopra) delle immagini delle sezioni di ϕ su V; ossia ogni sua componente connessa è omeomorfa a V tramite ϕ.
2) esiste una funzione continua positiva $\epsilon : Y \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $y \in Y$ ed $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ sulla palla di centro y e raggio $\epsilon(y)$ tale che $s(y) = x$.
3) *sollevamento dei cammini*: per ogni cammino continuo $\beta : [0, 1] \to Y$ ed ogni $x \in \phi^{-1}(\beta(0))$ esiste un cammino $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\phi \circ \alpha = \beta$.

La validità della condizione ($\sharp$), nel caso di una applicazione tra varietà differenziabili, è assicurata se ϕ non ha punti critici. Le condizioni equivalenti 1) , 2) e 3) sono allora automatiche se ϕ è propria; se essa non lo è, può invece accadere che l'intorno V di un $y \in Y$ sul quale ϕ si inverte non si possa scegliere indipendentemente da $x \in \phi^{-1}(y)$ e diviene allora necessario stimare quanto grande sia per $x \in X$ l'intorno V di invertibilità di ϕ fornito dal teorema di inversione locale al variare di $\phi(x)$ in Y.

La condizione 1) è quella di solito utilizzata per definire i rivestimenti. La 2) è stata espressa utilizzando una metrica su Y unicamente perché è spesso più facile esprimere maggiorazioni in termini numerici che insiemistici; ma per dimostrare che essa è equivalente alla 1), è più semplice utilizzare la sua seguente

formulazione equivalente che non fa ricorso a metriche anche se può apparire a prima vista meno chiara:
2') Esiste un intorno $\mathcal{V}$ della diagonale di $Y \times Y$ tale che per ogni $y \in Y$, detto V il sottoinsieme di Y per cui $\{y\} \times V = (\{y\} \times Y) \cap \mathcal{V}$ per ogni $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ su V con $s(y) = x$.

Per mostrare l'equivalenza tra le 1)-2) e la 3), la parte più difficile è dimostrare che da 3) segue 2). La dimostreremo come corollario del seguente:

Teorema 2 (di Monodromia) *Sia $\phi : X \to Y$ una applicazione continua verificante la condizione ($\sharp$) e quella sul sollevamento dei cammini. Allora ogni omotopia su Y si solleva in una omotopia su X se è fissato il suo sollevamento sulla faccia iniziale. Precisamente: se Z è uno spazio topologico e $f_0 : Z \to X$ e $F : Z \times [0,1] \to Y$ sono continue con $\phi(F(z,0)) = f_0(z)$ per ogni $z \in Z$, allora esiste $G : Z \times [0,1] \to X$ continua e tale che $\phi(G(z,t)) = F(z,t)$ e $G(z,0) = f_0(z)$ per ogni $(z,t) \in Z \times [0,1]$*

Dim. Per la condizione 3) si sollevano (in modo unico perché vale la ($\sharp$)) tutti i cammini dati dalla restrizione di F agli $\{z\} \times [0,1]$ a partire dagli $f_0(z)$; si trova quindi una $G : Z \times [0,1] \to X$ che solleva la F con le condizioni richieste salvo la continuità che è assicurata solo nella seconda variabile ogni volta che fissiamo la prima. Basterà quindi verificare che ogni $z \in Z$ ha un intorno A tale che G ristretta a $A \times [0,1]$ è continua; ed infatti, fissato z, esiste una decomposizione $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_r = 1$ ed aperti $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ per $i = 1, \ldots, r-1$, tali che ϕ è un omeomorfismo tra U_i e V_i e $G(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset U_i$. Per ogni $i = 1, \ldots, r-1$, esiste poi un intorno A_i di z in Z, tale che $F(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset V_i$. Detta A l'intersezione degli A_i, si avrà un sollevamento continuo della restrizione di F ad $A \times [0,1]$ costruita utilizzando gli omeomorfismi dagli U_i ai V_i che per l'unicità osservata sopra coincide con la restrizione di G a $A \times [0,1]$ e ciò conclude la dimostrazione.

Corollario 3 *Nelle ipotesi del precedente teorema, dati due cammini in Y aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale omotopi per una omotopia a estremi fissi, ogni due loro sollevamenti aventi stesso punto iniziale terminano nello stesso punto.*

Dim. Si sollevi l'omotopia tra i due cammini considerandola come una omotopia di faccia iniziale costante nel punto di inizio comune dei due cammini. Allora il cammino faccia finale del sollevamento è a valori nella fibra di ϕ sopra il punto finale dei cammini; essendo questa discreta tale cammino è costante.

Corollario 4 *Nelle ipotesi del precedente teorema, se V è un aperto semplicemente connesso di Y, ogni componente connessa U di $\phi^{-1}(V)$ è applicata da ϕ su V con un omeomorfismo.*

Dim. Essendo ϕ continua ed aperta (su X) basta dimostrare che $\phi : U \to V$ è biunivoca. Se $x_1, x_2 \in U$ hanno la stessa immagine y in V, si consideri un cammino da x_1 a x_2; la sua immagine in V sarà un cammino chiuso in V di origine y. Esso è omotopo al cammino costante in y perché V è semplicemente connesso. Utilizzando il corollario precedente si ottiene che $x_1 = x_2$ e quindi l'applicazione da U a V è uniettiva. Per la surgettività, dato $y \in V$, si scelgano un qualsiasi $x \in U$ ed un cammino da $\phi(x)$ a y; il sollevamento di tale cammino con origine x avrà punto finale un punto che si proietta in y.

2. Descrizione formale del gruppo fondamentale Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto fissato dello spazio topologico X.

Un *cammino formale* è una successione $i_0, \cdots, i_r$ di elementi di I tali che $U_{i_h} \cap U_{i_h+1}$ sia non vuoto per $h = 0, \cdots, r-1$. Diremo che tale cammino ha *inizio* in i_0 e *termine* in i_r. Si possono comporre in modo ovvio due cammini se il secondo inizia ove termina il primo . Se $\gamma_1 = (i_0, \cdots, i_r)$ è un cammino formale e $i \in I$ è tale che $U_{i_s} \cap U_i \cap U_{i_{s+1}}$ sia non vuoto allora il cammino $\gamma_2 = (i_0, \cdots, i_s, i, i_{s+1}, \cdots, i_r)$ è detto ottenuto da γ_1 per *espansione elementare* ; diremo anche che γ_1 è ottenuto da γ_2 per *contrazione elementare.* Due cammini sono *equivalenti* se si può passare dall' uno all'altro con un numero finito di espansioni e contrazioni elementari. Evidentemente due cammini equivalenti hanno stesso inizio e termine. E' facile verificare che le classi di equivalenza di cammini chiusi in i_0 (ossia cammini con inizio e termine in i_0) formano un gruppo che sarà detto gruppo formale di $\mathcal{U}$ e sarà indicato col simbolo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$.

Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia un buon ricoprimento dello spazio topologico connesso X. Fissiamo per ogni $i \in I$ un $x_i \in U_i$. Siano fissati inoltre cammini continui $\gamma_{i,j}$ da x_i a x_j in $U_i \cup U_j$ per ogni coppia $i, j \in I$ per cui $U_i \cap U_j$ sia non vuoto.

Costruiamo un omomorfismo $\phi : \Pi(\mathcal{U}, i_0) \to \pi_1(X, x_{i_0})$ associando ad un cammino formale $(i_0, \cdots, i_r, i_0)$ la classe di omotopia di $\gamma_{i_0,i_1} * \gamma_{i_1,i_2} * \cdots * \gamma_{i_r,i_0}$. Essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento , si verifica facilmente che ϕ è un omomorfismo ben definito indipendentemente dalle scelte fatte (a parte il punto base). Con un pò di lavoro analogo a quello richiesto per dimostrare il teorema di Van Kampen , si dimostra inoltre che ϕ è un isomorfismo .

Nota : si possono costruire generatori di $\pi_1(X, x_{i_0})$ fissando cammini continui γ_i da x_{i_0} a x_i in X . Allora i cammini $\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_i * \gamma_{i,j} * \gamma_j^{-1}$ per $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto , costituiscono un sistema di generatori per il gruppo fondamentale di X. Col teorema di Van Kampen si può anche dimostrare che una presentazione di π_1 in tali generatori è data dalle relazioni $\bar{\gamma}_{ij} * \bar{\gamma}_{jk} * \bar{\gamma}_{ki} = 1$ per ogni i, j, k tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

3. Il teorema di de Rham sulle $1-$forme Sia X una varietà differenziabile. Se ω è una 1-forma su X e $\gamma : [a, b] \to X$ è differenziabile, abbiamo definito $\int_\gamma \omega$. Se γ è solo continua tale integrale perde di significato; ma se si suppone che ω sia chiusa, possiamo definire l'integrale anche su cammini continui nel modo seguente: diciamo *piccola* una decomposizione $a = t_0 \leq \ldots \leq t_r = b$ se per $h = 1, \ldots, r$ si ha che $\gamma([t_{h-1}, t_h])$ è contenuto in un aperto U_h di X sul quale esiste una primitiva f_h di ω. Per una tale scelta di dati si definisce $\int_\gamma \omega = \sum_{h=1}^r f_h(\gamma(t_h)) - f_h(\gamma(t_{h-1}))$. Si verifica che tale valore non dipende dalle scelte fatte (le primitive locali, e la decomposizione di $[a, b]$) e che tale valore rimane lo stesso anche se si cambia γ in un cammino a lui omotopo per una omotopia che lascia fissi punto iniziale e finale. In particolare fissato un punto base $x_0 \in X$, si ottiene una applicazione $Z^1(X) \times \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ che è chiaramente bilineare. E' ovvio che se ω è esatta essa ha integrale nullo su tutti i cammini chiusi per cui si ottiene una forma bilineare $H^1_{DR}(X) \times \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$. Ad essa è associato un omomorfismo $\nu : H^1_{DR}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), \mathbb{R})$.

Teorema 5 *L'omomorfismo ν costruito sopra è un isomorfismo.*

Dim. Sia ω una 1-forma chiusa su X tale che $\int_\gamma = 0$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Se

$\sigma : [0,1] \to X$ è un cammino in X che parte da x_0, allora $\int_\sigma \omega$ dipende solo dal punto finale $x = \sigma(1)$; esso definisce quindi una funzione $f : X \to \mathbb{R}$. Che tale f è differenziabile e che $df = \omega$, si verifica direttamente utilizzando un sistema di coordinate locali all'intorno di x. Ciò dimostra la iniettività di ν.

Per la surgettività occorre mostrare che se $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ è un omomorfismo, allora esiste una 1-forma chiusa ω tale che $\int_\gamma = \sigma(\gamma)$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. La costruzione di tale ω si fa utilizzando un buon ricoprimento (vedi ad esempio [L1]) $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X, con aperto base U_{i_0} contenente x_0 nel modo seguente.
Siano fissati i seguenti dati:
-per $i \in I$, un punto $x_i \in U_i$ ed un cammino continuo γ_i da x_0 a x_i.
-per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, un cammino continuo γ_{ij} in $U_i \cup U_j$ da x_i a x_j.
Consideriamo i cammini chiusi $\delta_{ij} = \gamma_i * \gamma_{ij} * \gamma_j^{-1}$ per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e poniamo $c_{ij} = \sigma(\delta_{ij})$. Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento, $U_i \cup U_j \cup U_k$ è semplicemente connesso per cui si ha la relazione $\delta_{ij} * \delta_{jk} = \delta_{ik}$ e di conseguenza $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$.

Sia $(\phi_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. Per $x \in U_i$ poniamo:

$$f_i(x) = \sum_{h \in I'} c_{ih} \phi_h(x)$$

ove I' indica l'insieme degli $h \in I$ per cui $x \in U_h$. Se $x \in U_i \cap U_j$ si ha:

$$f_i(x) - f_j(x) = \sum_{h \in I'} (c_{ih} - c_{jh}) \phi_h$$

Per $h \in I'$ si ha $U_i \cap U_j \cap U_h \neq \emptyset$ e quindi $c_{ih} - c_{jh} = c_{ij}$ non dipende da h. Allora

$$f_i(x) - f_j(x) = c_{ij} \cdot \sum_{h \in I'} \phi_h(x) = c_{ij}$$

perché $\phi_h(x) = 0$ se $h \notin I'$. Le f_i differiscono così sull'intersezione di due elementi di U per una costante: i loro differenziali definiscono quindi una 1-forma chiusa globale ω di cui le f_i sono delle primitive locali. Ciò, ricordando la definizione data avanti di integrale su un cammino continuo, dimostra che per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ si ha $\sigma(\omega) = \int_\gamma \omega$ e la dimostrazione è conclusa

4. Il gruppo dei periodi simultanei Il teorema che segue, anche se non appare evidente a prima vista, è essenzialmente una riformulazione del teorema di de Rham.

Teorema 6 *Sia X una varietà differenziabile compatta e connessa. Allora:*
1) $H^1_{DR}(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita r
2) se $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sono 1-forme chiuse su X che inducono una base di $H^1_{DR}(X)$, il gruppo Γ dei periodi da esse determinato è un sottogruppo discreto di rango massimo (quindi r, cosicché $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r$) in $\mathbb{R}^r$ e quindi $\mathcal{T}(X)$ indotte dai differenziali $dx_1, \ldots, dx_r$ delle coordinate su $\mathbb{R}^r$, si abbia $\omega_i = f^*(d\theta_i)$ per $i = 1, \ldots, r$
4) la f del punto precedente classifica le classi di omotopia di X nei quozienti di $\mathbb{R}^m$ per sottogruppi discreti nel senso seguente:
se $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ è un sottogruppo discreto, la composizione con f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\{$omomorfismi differenziabili di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta\}$ e l'insieme $[(X, x_0), (\mathbb{R}^m/\Delta, 0)]$ delle classi di omotopia di applicazioni differenziabili di (X, x_0) in $(\mathbb{R}^m/\Delta, 0)$

Dim. Essendo X compatta il gruppo fondamentale $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ è finitamente generato; di coseguenza $Hom(\Pi, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e quindi il punto 1) è dimostrato dal teorema di de Rham.

Alla applicazione bilineare $H^1_{DR}(X) \times \Pi \to \mathbb{R}$ definita da $(\omega, \gamma) \to \int_\gamma \omega$ è associato un omomorfismo $\sigma : \Pi \to Hom(H^1_{DR}(X), \mathbb{R})$; utilizzando su $Hom(H^1_{DR}(X), \mathbb{R})$ la base duale di quella indotta da $\omega_1, \ldots, \omega_r$ su $H^1_{DR}(X)$, l'immagine di σ diviene precisamente il sottogruppo dei periodi Γ associato alle ω_i. Utilizzando il teorema di de Rham, ci si riduce quindi a studiare l'immagine del gruppo fondamentale Π nell'omomorfismo naturale:

$$\Pi \to Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

Se Π' è l'abelianizzato di Π, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\sigma} & Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ è chiaramente un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è abeliano.
Analogamente se Π'' è il quoziente di Π' modulo il sottogruppo di torsione, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \Pi'' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi'', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ' è un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è privo di torsione. In definitiva si può supporre che Π sia abeliano senza torsione ed essendo inoltre finitamente generato esso sarà isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ per qualche intero m; dovrà essere necessariamente $m = r$ perché $Hom(\Pi, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^r$. E' poi evidente che l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z}^r \to Hom(Hom(\mathbb{Z}^r, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ è l'inclusione $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r$ e ciò dimostra il punto 2).

Per la 3) si costruisce la f applicando un $x \in X$ nel vettore avente per componenti gli integrali delle ω_i su un qualsiasi cammino da x_0 ad x: riducendo modulo Γ tale applicazione diviene ben definita e verifica ovviamente le condizioni richieste.
Dimostriamo la 4):
surgettività: sia $g : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ differenziabile ove Δ è un sottogruppo discreto in $\mathbb{R}^m$. Dette $y_1, \ldots y_m$ le coordinate su $\mathbb{R}^m$, poniamo $\alpha_i = g^*(dy_i)$ per $i = 1, \ldots, m$. Per l'ipotesi fatta sulle ω_i, esisteranno delle relazioni:

$$\alpha_i = \sum_j c_{ij}\omega_j + df_i$$

ove alla matrice C fatta con i c_{ij} è associata una applicazione lineare di $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}^m$ che applica Γ entro Δ e quindi definisce un omomorfismo (differenziabile) $\beta : \mathcal{T}(X) \to \mathbb{R}^m/\Delta$. Resta da dimostrare che $\beta \circ f$ è omotopa a g. L'omotopia viene realizzata integrando le m 1-forme:

$$\sum_i c_{ij}\omega_j + tdf_i$$

per $t \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, m$.
iniettività: se $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ sono omotope, allora per ogni $i = 1, \ldots, m$ le forme $g_1^* dy_i$ e $g_2^* dy_i$ individuano la stessa classe di coomologia su X ossia, a meno di differenziali esatti, sono espresse dalla stessa combinazione lineare delle ω_j: i coefficienti di tali combinazioni sono appunto quelli che determinano l'omomorfismo di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta$ che composto con f dà una applicazione omotopa alle g_i ; tali omomorfismi sono quindi univocamente determinati dalla classe di omotopia delle loro composizioni con f.

[1] **F.Lazzeri** *Esistenza di buoni ricoprimenti* http:www.dm.unipi.it/gauss-pages/lazzeri
[1] **F.Lazzeri** *Inversione di Integrali* http:www.dm.unipi.it/gauss-pages/lazzeri