Esistenza di buoni ricoprimenti

(F.Lazzeri; Pisa ottobre 1998)

Introduzione. Nel passaggio da soluzioni locali a soluzioni globali è spesso utile e talvolta necessario, conoscere l'esistenza di ricoprimenti aperti arbitrariamente fini, tali che non solo ogni aperto del ricoprimento sia "semplice "per il problema che stiamo trattando, ma anche ogni intersezione finita di essi lo sia. Così ad esempio per una dimostrazione particolarmente semplice della dualità di Poincaré per la coomologia delle forme su una varietà differenziabile ([B]) od anche per studiare i periodi simultanei di $1-$forme chiuse ([L]). Di solito l'esistenza di tali ricoprimenti è ottenuta ([B] , [M]) utilizzando un teorema di J.H.C.Whitehead che assicura l'esistenza di aperti *geodeticamente convessi* rispetto ad una metrica riemanniana prefissata (vedi ad esempio [H], p. 53).

Descriveremo qui un altro metodo per ottenere ricoprimenti semplici che oltre ad essere più elementare del precedente evita di ricorrere all'integrazione; di conseguenza, ad esempio, se si parte da una varietà algebrica reale, gli aperti utlizzati sono automaticamente semialgebrici. In qualche modo sembra quindi che i ricoprimenti costruiti nel modo che proponiamo qui siano i più "semplici" possibili. Nel seguito tratteremo il caso differenziabile; il metodo seguito si applica senza cambiamenti ad altre classi di regolarità' ad esempio a quello semialgebrico.

1. Buoni ricoprimenti in $\mathbb{R}^n$

Chiamiamo *semplice* un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ di una varietà X di dimensione n se:
(1) è localmente finito
(2) se $i_0, \cdots, i_p \in I$ sono tali che $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$, allora tale aperto è diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.
Chiameremo invece *buono* un ricoprimento aperto di X se è semplice ed inoltre si ha :
(3) se $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$ allora $U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_p}$ è diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1 *Se X è aperto di $\mathbb{R}^n$, esso ha ricoprimenti buoni arbitrariamente fini.*

dim. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Costruiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che è buono e più fine di $\mathcal{U}$ nel modo seguente. Fissiamo una famiglia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di $\mathbb{R}^n$ che ricoprano X ed ognuno dei quali sia contenuto nella parte interna del successivo. Allora per $n \geq 2$, $K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$ è coperto da un numero finito di palle aperte $\mathcal{U}-$piccole (cioè contenute in qualche elemento di $\mathcal{U}$) e contenute in $\overset{\circ}{K}_{n+2} - K_{n-1}$. E' chiaro come in questo modo si possa costruire un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ di X localmente finito, più fine di $\mathcal{U}$ e tale che se $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p} \neq 0$ allora esso e $V_{i_0} \cup \cdots \cup V_{i_p}$ sono aperti stellati (rispetto a qualche loro punto) limitati in $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione è quindi conclusa dal seguente:

Lemma 2 *Ogni aperto stellato limitato $V \subset \mathbb{R}^n$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$*

dim. supponiamo che V sia stellato in $0 \in \mathbb{R}^n$.

Asserzione 1 : esiste una successione (ϕ_n) di funzioni differenziabili su S^{n-1} tali che :
1. per ogni n sia $0 < \phi_n < \phi_{n+1}$
2. l'unione dei $V_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi_n(x/\|x\|)\}$ è tutto V.

Dimostriamo l'asserto. Sarà sufficiente mostrare che esiste una successione $(\phi)_n$ di funzioni continue, verificanti 1. e 2. , perchè allora, approssimando (con Weierstrass) abbastanza finemente le ϕ_n con funzioni differenziabili, si ha la famiglia richiesta (precisamente, se $r_n = d(\phi_n, \phi_{n+1})$, si approssimi ϕ_n a meno di $\frac{1}{2} inf\{r_n, r_{n-1}\}$).

Sia quindi $\rho : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ definita da $\rho(x) = sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda x \in V\}$.
Tale ρ è semicontinua nel senso che per $x_0 \in S^{n-1}$ e $\epsilon > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che per $y \in U$ si ha $\rho(y) > \rho(x_0) - \epsilon$.

Sia $\mathcal{R} = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n] : f < \rho\}$. Questa è una famiglia numerabile il cui primo elemento può essere scelto una costante $f_0 \in \mathbb{Q}$ positiva (perchè ρ ha un minimo positivo.

Poniamo $\phi_n = sup_i\{f_i\}$. Allora $0 < \phi_n \leq \phi_{n+1}$.Tale successione $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa la proprietà 2. . Infatti se $x_0 \in V$, $\|x_0\| < \rho(x_0/\|x_0\|)$;
per semicontinuità di ρ , esiste un intorno U di x_0 tale che $\rho > \|x_0\|$ in U. Allora esiste una funzione continua $\sigma : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ con $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$ e $\text{supp}(\sigma) \subset U$. Quindi $\sigma < \rho$ e $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$. Se $\epsilon > 0$ è tale che $\rho - \sigma > \epsilon$ ossia $\sigma + \epsilon < \rho$, approssimando sufficientemente $\sigma + \epsilon$ con un elemento $f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ si trova una $f \in \mathcal{R}$, quindi $f = f_n$ per qualche n e $f_n(x_0/\|x_0\|) > \|x_0\|$.

Manca da soddisfare la condizione $\phi_n < \phi_{n+1}$. Essa non sarà in generale soddisfatta ma sarà ottenibile cancellando alcune ϕ_i e ciò conclude la dimostrazione dell'asserzione 1.

Asserzione 2: Sia $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ differenziabile e sia $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi(x/\|x\|)\}$. Allora esiste un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se che trasforma una palla aperta in V.

Dimostriamo questa asserzione: $\mathbb{R}^n - 0$ può essere pensato come $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ tramite il diffeomorfismo (coordinate polari):

$$S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \ni (s, r) \to r \cdot s \in \mathbb{R}^n - \{o\}.$$

Considereremo applicazioni $F : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to S^{n-1} \times R^+$ del tipo $F(s, r) = (s, h(s, r))$ ove $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è differenziabile ; ogni tale f sarà evidentemente differenziabile. Articoleremo il ragionamento nei seguenti quattro passi:
A) Se esiste $\epsilon > 0$ tale che $h(s, r) = r$ per $r < \epsilon_0$, tale F induce una applicazione differenziabile di $\mathbb{R}^n$ in se che è l'identità vicino all'origine.
B) Se $\partial h / \partial r > 0$, allora F rappresenta un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (teorema di inversione locale + iniettività).
C) Se inoltre $\lim_{r \to +\infty} = +\infty$ per ogni s , allora F è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se. In tal caso , $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ viene trasformato su $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h(x/\|x\|, 1)\}$. Affinchè sia $\Omega = V$, occorre quindi che valga anche la :
D) $h(x/\|x\|, 1) = \phi(x/\|x\|)$.

Dimostriamo ora l'esistenza di una $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ soddisfaciente le quattro condizioni A,B,C e D.
Siano $0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \phi$. E' facile costruire funzioni differenziabili $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

verificanti le condizioni :
- $\lambda(t) = 1$ per $t \leq \epsilon_0$, $\lambda(t) = 0$ per $t \geq 1$, $\lambda \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = M < \epsilon_1$.
- $\mu(t) = 0$ per $t \leq \epsilon_0$ o $t \geq 1$, $\mu \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = M < \epsilon_1$.

Si vede facilmente che la funzione $h(s,r) = \int_0^r (\lambda(t) + (\phi(s) - M)\mu(t))dt$ verifica le condizioni richieste.

Asserzione 3. Esistono diffeomorfismi $F_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che trasformano $B(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < p\}$ in V_p e tali che per $p \geq 2$, F_p coincide con F_{n-1} su $B(n-1)$. Ciò viene dimostrato sostanzialmente nello stesso modo dell'asserzione 2.

Definiamo ora $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con la formula : $F(x) = F_p(x)$ se $x \in B(p)$. E' chiaro che F è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e V.

Per estendere la costruzione fatta nel caso di un aperto di $\mathbb{R}^n$ al caso di una varietà differenziabile qualsiasi , supponiamo $X \subset \mathbb{R}^n$ e definiamo una sorta di "convessi" su X che "funzionano" come i convessi di $\mathbb{R}^n$.

Def. Un *dominio a frontiera liscia* in una varietà differenziabile X di dimensione n , è un aperto Ω di X che verifica le proprietà :
1. Ω è la parte interna della sua chiusura
2. $\bar{\Omega}$ è una sottovarietà compatta a bordo di X

Ciò è equivalente a richiedere:
1'. Ω è relativamente compatto in X
2'. ogni $x_0 \in \partial\Omega$(=frontiera topologica di Ω) ha un intorno U su cui esiste una funzione differenziabile $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$ e se $f(x) = 0$, allora $df(x) \neq 0$. Una tale f è detta una *equazione* su U per il bordo di Ω.

2. Fortemente convessi in $\mathbb{R}^n$

Siano X un dominio a frontiera liscia in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial\Omega$, U un intorno aperto di x_0 in $\mathbb{R}^n$ ed h una equazione locale per $\partial\Omega$ su U. Chiameremo *hessiano di h* in X la forma quadratica su $T(\partial\Omega)_{x_0}$ che è restrizione della forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ associata alla matrice $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(x_0))$; essa verrà indicata con $\mathcal{H}(h)(x_0)$.

Lemma 3 *Se k è un'altra equazione locale su U per $\partial\Omega$, allora esiste una costante positiva ρ tale che $\mathcal{H}(k) = \rho\mathcal{H}(h)$.*

Def. Per il lemma precedente la segnatura di $\mathcal{H}(h)$ (ossia la terna (a,b,c) data dai suoi indici di positività , negatività e nullità) è indipendente dalla particolare equazione utilizzata e sarà detta la *segnatura* di Ω in $x_0 \in \partial\Omega$

Dim. del Lemma: Per il teorema di divisione , si ha che $k = rh$ con $r : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile mai nulla in U anzi strettamente positiva perchè h, k sono entrambe negative su $\Omega \cap U$.

confrontiamo gli hessiani di h, k ; calcoliamo prima su $\mathbb{R}^n$:
- $\partial k/\partial x_i = \partial r/\partial x_i + r\partial h/\partial x_i$
- $\partial^2 k/\partial x_i \partial x_j = (\partial^2 r/\partial x_i \partial x_j)h + (\partial r/\partial x_i)(\partial h/\partial x_j) +$
$+ (\partial r/\partial x_j)(\partial h/\partial x_i) + r(\partial^2 h/\partial x_i \partial x_j)$

Calcolando in x_0 si ha $h = 0$, quindi il primo addendo del secondo membro si annulla. Vediamo poi che calcolando l'hessiano di k su un vettore $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$, anche il secondo e terzo addendo si annullano , cosicchè solo il quarto membro rimane e quindi $\mathcal{H}(k)(x_0) = r(x_0)\mathcal{H}(h)(x_0)$ ove $r(x_0) \neq 0$.
Infatti la matrice data da secondo e terzo membro si può scrivere:

$(\nabla r)(\nabla h)^* + (\nabla h)(\nabla r)^*$ (M^* indica la trasposta della matrice M).

Il suo valore su un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è dato da $v^*(\nabla r)(\nabla h)^* v + v^*(\nabla h)(\nabla r)^* v$ ed essendo l'equazione di $T(\partial\Omega)_{x_0}$ esattamente $v^*(\nabla h) = 0$ od anche $(\nabla h)^* v = 0$, tale espressione si annulla per $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$.

Nota Si può dare la seguente caratterizzazione della segnatura (a, b, c) di un dominio liscio in un suo punto x_0 del bordo:

Sia $H \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio affine ; diremo che esso è *tangente* a X in x_0 se $x_0 \in H$ e se la direzione di H (unico sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di cui H è un traslato) è contenuto in $T(\partial\Omega)_{x_0}$. Un tale H è detto *tangente internamente* (risp. *tangente esternamente*) a X in x_0 se è tangente nel senso precisato sopra ed esiste $\epsilon > 0$ tale che $H_\epsilon = \{v \in H : 0 < \|v - x_0\| < \epsilon\} \subset \Omega$.

Considerando la restrizione della funzione h ad H si vede facilmente che $a \leq$massima dimensione dei sottospazi affini tangenti esternamente ad Ω in x_0 $\leq a + c$ e b è riferito analogamente alle possibili dimensioni degli spazi affini tangenti internamente. Ne segue che se l'hessiano è non degenere , ossia $c = 0$, allora a e b misurano esattamente tali dimensioni.

Def. Un aperto *fortemente convesso* in $\mathbb{R}^n$ è un dominio a frontiera liscia , connesso ed avente segnatura $(n - 1, 0, 0)$ in ogni punto del bordo.

Proposizione 4 *Un aperto fortemente convesso in $\mathbb{R}^n$ è convesso.*

Dim. Siano $x_0, x_1 \in \Omega$; dobbiamo mostrare che $[x_0, x_1] \subset \Omega$. Essendo Ω connesso , esiste una curva $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Sia $\Delta = \{t \in [0, 1] : [x_0, \gamma(t)] \not\subset \Omega\}$ Tale Δ è chiaramente un chiuso in $[0, 1]$, quindi se non vuoto ha un primo elemento t_0. E' facile convincersi che allora la retta H per $x_0, \gamma(t_0)$ è tangente internamente a $\partial\Omega$ in qualche suo punto $\bar{x}$. Ma allora la segnatura di $\partial\Omega$ in $\bar{x}$, dovrebbe avere $b + g > 0$ contro l'ipotesi.

Nota : La segnatura di un dominio liscio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non cambia , cambiando linearmente le coordinate di $\mathbb{R}^n$; tale nozione è quindi trasportabile su uno spazio vettoriale (o affine) qualsiasi.

3. Fortemente convessi in sottovarietà di $\mathbb{R}^n$

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà .

Def. Un *dominio fortemente convesso* in X è un dominio liscio $\Omega \subset X$ tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ $\pi_x : X \to T(X)_x$ induce un diffeomorfismo tra $\bar{\Omega}$ e la chiusura di un dominio fortemente convesso di $T(X)_x$ (ossia è un dominio che "letto" dallo spazio tangente di un qualsiasi punto della sua chiusura , "appare" fortemente convesso).

Proposizione 5 *Siano $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile e $x_0 \in X$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo , $B_\epsilon = \{x \in X : \|x - x_0\|^2 < \epsilon\}$ è un dominio fortemente convesso di X.*

Dim. La proiezione ortogonale di $T(X)_x$ su $H = T(X)_{x_0}$ per x in un intorno sufficientemente piccolo U di x_0 in X , è un isomorfismo ; si ottiene così , utilizzando anche una carta locale su X di centro x_0 una applicazione $f(x, y) : U \times \mathbb{R}^n \to H$ che rappresenta $\phi_x(y)$ e che è chiaramente differenziabile. Per $\epsilon > 0$ indichiamo con D_ϵ la chiusura di B_ϵ in X. Mostriamo che esiste $\epsilon > 0$ tale che per $x \in D_\epsilon$, π_x induce un diffeomorfismo tra D_ϵ e la sua immagine e questa è un dominio fortemente convesso.

Iniettività di $d\pi_x$:

per assurdo esisterebbero x_h , $y_h \in \mathbb{R}^n$ e $v_h \in S^{n-1}$ tali che $df_{x_h}(y_h)[v_h] = 0$. Passando al limite in qualche sottosuccessione per cui v_h converga , si avrebbe

$df_0(0)[v] = 0$ che non è possibile perchè f_o è l'identità e $\|v\| = 1$.
Iniettività di π_x:
per assurdo esisterebbero $x_h, a_h \neq b_h \in \mathbb{R}^n$ tali che $f_{x_h}(a_h) = f_{x_h}(b_h)$. Utilizzando lo sviluppo $f(x, y+z) = f(x,y) + \phi(x,y,z)[z]$ si avrebbe $f(x_h, b_h) = f(x_h, a_h) + \phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h]$ e quindi $\phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h] = 0$. Osservato che $\phi(0,0,0)$ è l'identità su $\mathbb{R}^n$ e passando al limite in una sottosuccessione per la quale $b_h - a_h/\|b_h - a_h\|$ converge si ottiene una contraddizione.

Si osservi ora che per ϵ piccolo , $D_\epsilon \subset X$ è un dominio connesso a frontiera liscia (si utilizzi ad esempio il lemma di Morse). Resta qindi da dimostrare che se ϵ è piccolo , per ogni $x \in D_\epsilon$ il dominio connesso a frontiera liscia $\pi_x(D_\epsilon)$ in $T(X)_x$ ha segnatura $(n-1, 0, 0)$ in ogni punto del bordo.

Resta quindi da verificare la condizione sugli hessiani. Una equazione di definizione per il bordo di Ω_ϵ su X è data dalla funzione $\|x - x_0\|^2$. Verifichiamo che essa in tutti i punti di Ω_ϵ e su tutto lo spazio tangente (e non solo su $T(\partial\Omega)$ come già basterebbe ai nostri fini) è definita positiva. Infatti, siccome il fatto di avere hessiano definito positivo è invariante per cambiamenti affini di coordinate, possiamo leggere $T(X)_y$ per proiezione ortogonale su $H = T(X)_{x_0}$. Si ottiene così una funzione $\phi(x,y)$ definita in un intorno $U \times V$ di $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = H \times H$ che per $y \in V$ rappresenta (a meno di una costante $-\epsilon$) una equazione per il dominio D_ϵ "letto" su $T(X)_y$. Siccome f_0 ha hessiano definito positivo, ne segue che anche le f_y per y piccolo hanno hessiano positivo (su qualche intorno compatto di 0 in X) e ciò conclude la dimostrazione.

[1] **R.Bott,L.W.TU** *Differential Forms in Algebraic Topology* Springer, 1987
[1] **S.Helgason** *Differential Geometry and Symmetric Spaces* Academic Press 1962
[1] **F.Lazzeri** *Periodi simultanei di* $1-$*forme* http:www.dm.unipi.it/gauss-pages/lazzeri
[1] **J.Milnor** *Morse Theory* Ann.of Math.Studies No.51 Princeton Univ.Press 1963