ALGEBRA 1 — 25 SET 2018

Note Title 9/25/2018

Argomenti del corso:
Gruppi - Anelli - Campi e gruppi di Galois.

G gruppo: operazione associativa, identità, inverso.
G commutativo (o abeliano): $xy = yx \quad \forall x, y \in G$.

Sottogruppi e sottogruppi normali.
$H < G$: H è un gruppo con l'operazione indotta da G.
$H \triangleleft G$: $xH = Hx \quad \forall x \in G$ oppure $xHx^{-1} \subseteq H \quad \forall x \in G$.

① Prodotti diretti di gruppi.
A, B gruppi.
$G = A \times B$ (come insieme è il prodotto cartesiano)

Come gruppo ha l'operazione:
$$(a, b)(a', b') \stackrel{\text{def}}{=} (aa', bb')$$

Esempio: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

<u>Proposizione</u> Sia G un gruppo, e siano H, K due sottogruppi NORMALI di G tali che:

① $H \cap K = \{e\}$

② $\boxed{HK = G}$ $\quad (HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\})$

Allora $G \cong H \times K$.

Dim. Costruisco un isomorfismo
$$\varphi : H \times K \to G.$$
Definisco $\varphi(h,k) = hk$.

Omomorfismo:
$$\varphi((h,k),(h',k')) \stackrel{?}{=} \varphi(h,k)\,\varphi(h',k')$$
$$\varphi(hh', kk')$$
cioè $\quad hh'kk' = hkh'k'$

Per dimostrarlo, mi serve $h'k = kh'$

Equivalentemente, mi serve $h'k(h')^{-1} = k$

o anche $\boxed{h'k(h')^{-1}k^{-1}} = e$

$$\underbrace{(h'k(h')^{-1})}_{\in K}\ \underbrace{k}_{\in K} \qquad \underbrace{h'}_{\in H}\,(\underbrace{k(h')^{-1}k^{-1}}_{\in H})$$

$\to K \cap H = \{e\}$

Iniettivo $\quad \ker\varphi = \{(h,k) \mid hk = e\}$

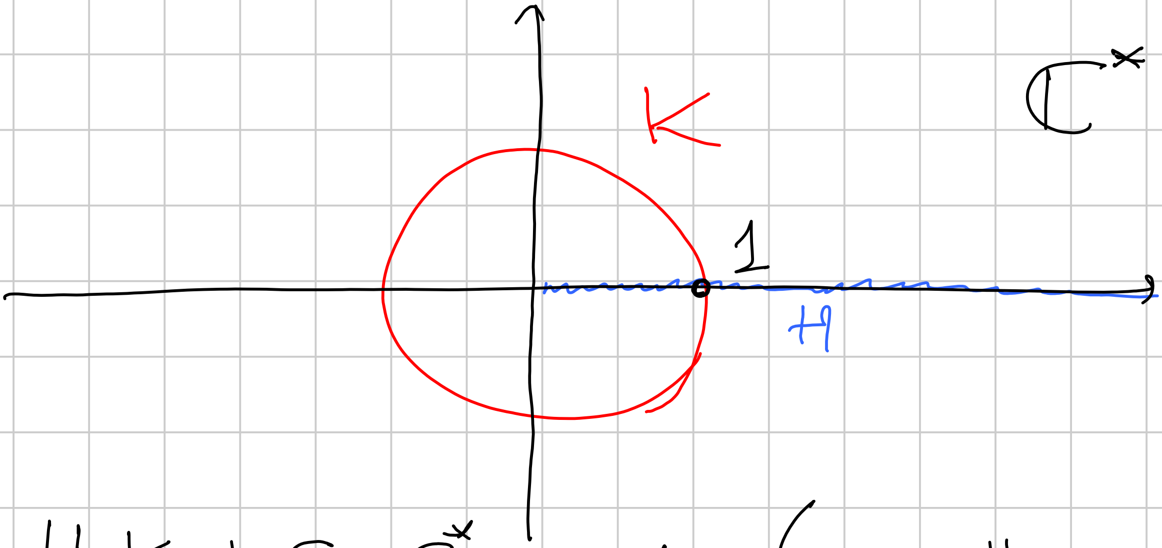
$$\underset{\in H}{h}k = e \iff h = \underset{\in K}{k^{-1}} \qquad H \cap K = \{e\} \Rightarrow h = k = e$$

Surgettivo: fa parte delle ipotesi. (ipotesi 2).

Esempio: $G = \mathbb{C}^*$ (complessi $\neq 0$ con moltiplicazione)

$H = \mathbb{R}_+$ (moltiplicazione) $\quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$K = U$ (cerchio unitario) $\quad U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$



$H, K \triangleleft G = \mathbb{C}^\times$ ovvio (sono sottogruppi e $\mathbb{C}^\times$ è abeliano)

$H \cap K = \{1\}$

$HK = \mathbb{C}^\times$

$h \in H \qquad h = e^{\varrho} \qquad \varrho \in \mathbb{R}$

$k \in K \qquad k = e^{i\vartheta} \qquad \vartheta \in \mathbb{R}$

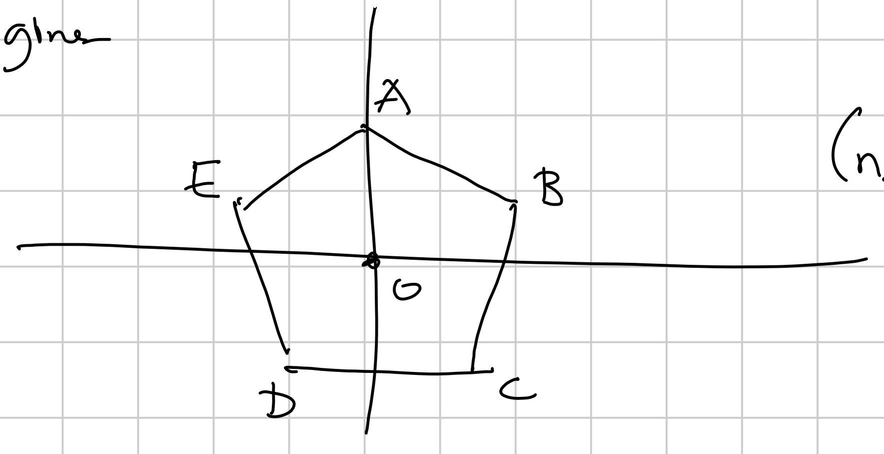
Se $z \in \mathbb{C}^\times \quad z = e^{\varrho + i\vartheta} \in H \times K$

$\mathbb{C}^\times \subseteq H \times K$

I gruppi diedrali

Si tratta di sottogruppi del gruppo delle isometrie del piano $(\, d(f(P), f(Q)) = d(P, Q))$.

Prendiamo un n-agono regolare, con centro nell'origine



$(n=5)$

Consideriamo tutte le isometrie del piano che mandano il poligono in se stesso

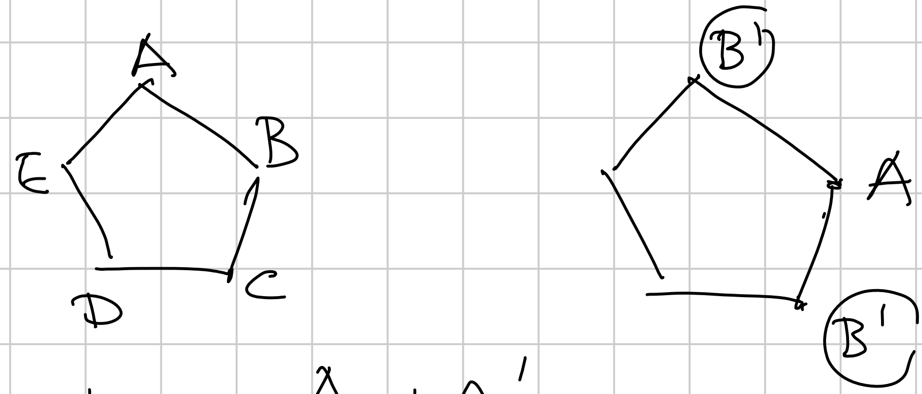
Ovvio: il centro (l'origine) va in se stesso.

- i vertici vanno in se stessi.

Una tale isometria "induce" una permutazione dei vertici.

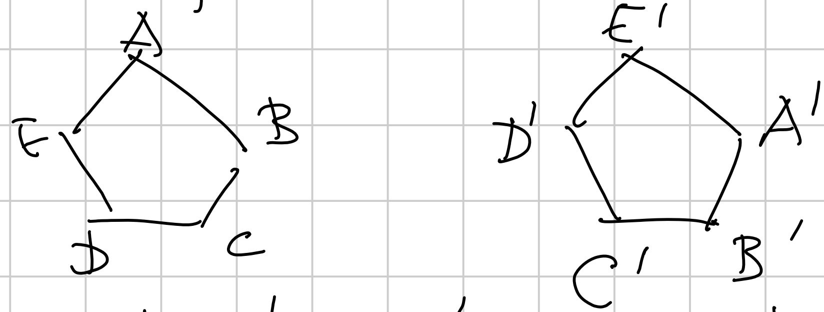
In quanti modi?

un vertice può andare in ciascuno degli n vertici



Supponiamo $A \to A'$

B ha 2 possibilità.



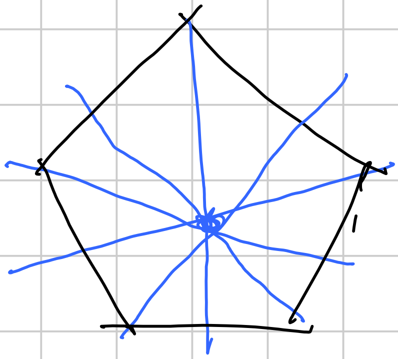
Per gli altri c'è un'unica scelta

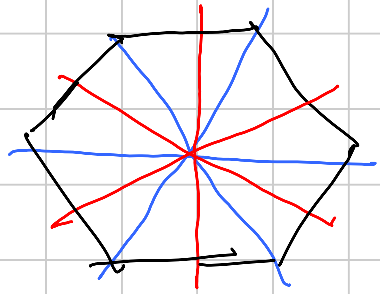
Ci sono $\leq 2n$ scelte.

In effetti, vale l'uguaglianza

Ci sono: n rotazioni intorno all'origine di angolo $\frac{2\pi k}{n}$ $k=0,\dots,n-1$.

: n simmetrie rispetto a rette.





rette di simmetria
vertice $\leftrightarrow$ punto medio
del lato opposto

rette di simmetria:
due vertici opposti
punti medi di due lati
opposti

Totale $= 2n$.

r rotazione s simmetria

$$G = D_n = \langle r, s \rangle$$

gruppo diedrale,
delle isometrie
dell'n-agono regolare

$|D_n| = 2n$

$\langle r \rangle < D_n$ la metà,
n elem. $2n$ elementi   quindi $D_n = \langle r, s \rangle$.

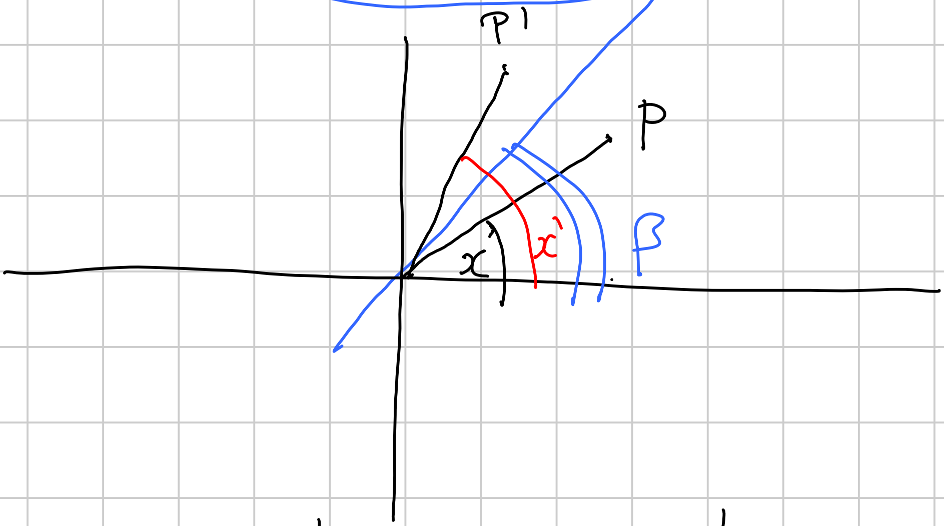
$r^n = e$ r = rotazione di $\frac{2\pi}{n}$ ha ordine n.

$s^2 = e$

Gli elementi del gruppo sono tutti della forma
$r^i s^j$ $0 \le i < n$ $0 \le j < 2$

Regola per la moltiplicazione:

$$\boxed{rs = sr^{-1}}$$



r = rotazione di angolo α

s = simmetria rispetto a una retta che forma un angolo β rispetto all'asse delle x

$$x + x' = 2\beta \qquad x' = 2\beta - x$$

Se adesso ruoto, trovo un punto x'' che fa un angolo $x'' = \boxed{2\beta - x + \alpha}$

Ora se faccio r^{-1} $\quad x \to x' = x - \alpha$

e applicando s $\quad x'' + x' = 2\beta$

$$x'' = 2\beta - x' = \boxed{2\beta - x + \alpha}$$

Moltiplicazione fra due elementi qualsiasi del gruppo:

$$r^a s^b \cdot r^c s^d \qquad 0 \le a, c < n \quad 0 \le b, d < 2$$

1° caso $\quad b = 0 \qquad r^a \cdot r^c s^d = r^{a+c} s^d$

2° caso $\quad b = 1 \qquad r^a \underbrace{s \cdot r^c} s^d$

So che $rs = sr^{-1}$ (equivalentemente $r^{-1}s = sr$)

$srs^{-1} = r^{-1}$ $\longleftarrow$ (moltiplicato per s^{-1} a destra)

Questo da $\quad sr^c s^{-1} = r^{-c} \quad \Rightarrow \quad sr^c = r^{-c} s$

$$\underset{(srs^{-1})^c}{\underset{\parallel}{sr^c s^{-1}}}$$

Questo finisce:

$$r^a (s \cdot r^c) s^d = r^a (r^{-c} s) s^d = r^{a-c} s^{d+1}.$$

D_n $\qquad R < D_n$ $\qquad S = \langle s \rangle$

rotazioni $\quad R = \langle r \rangle$ $\qquad$ una simmetria qualsiasi.

Sono sottogruppi normali?

- metà degli elementi $\to$ sottogruppo normale
- due elementi $\to$ normale $\Leftrightarrow$ contenuto nel centro.

$$H = \{e, g\}$$

$$xH = Hx \quad \forall x \in G$$

$$x\{e, g\} = \{e, g\} x$$

$$\{x, xg\} = \{x, gx\}$$

$xg = gx \quad \forall x \in G$

$\Downarrow$

$g \in$ centro.

$S \ntrianglelefteq D_n$.

Esercizio Determinare tutti i sottogruppi di D_n e quali fra essi sono sottogruppi normali.