GRUPPI FAMOSI

Note Title 9/26/2018

Diedrale

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = id,\ s^2 = id,\ sr = r^{-1}s \rangle$$

Sottogruppi di D_n?

$R_n = \langle r \rangle \triangleleft D_n$ (normale in quanto di indice 2)

$R_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* Sottogruppi di R_n: per ogni $d \mid n$, esiste un unico sottogruppo di ordine d

* Sottogruppi di D_n non contenuti in R_n.

Sia H un tale sottogruppo.

$H \cap R_n \supseteq \{e\}$

Può in effetti succedere che $H \cap R_n = \{e\}$, per esempio se $H = \langle s \rangle$.

Speranza: $|H \cap R_n| = \frac{1}{2}|H|$

$R_n \triangleleft D_n \implies$ esiste un omomorfismo surgettivo

$$\varphi : D_n \twoheadrightarrow D_n/R_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

con $\ker \varphi = R_n$.

$\varphi|_H$ è ancora un omomorfismo surgettivo

$$\varphi|_H : H \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Oss. Ogni simmetria $(= r^k s)$ rispetta

$$\varphi(r^k s) = \underbrace{\varphi(r^k)}_{\substack{\text{identità} \\ \text{di } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{perché } r^k \in R_n = \ker \varphi}} + \underbrace{\varphi(s)}_{1} = 1$$

(H contiene almeno una simmetria)

Primo teo omomorf:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H/\ker \varphi|_H = \frac{H}{R_n \cap H}$$

$$\implies \quad 2 = \frac{|H|}{|R_n \cap H|} \implies |R_n \cap H| = \frac{1}{2}|H|$$

Altra classe di sottogruppi: quelli di ordine 2 generati da $r^k s$, $k = 0, \dots, n-1$

Più generalmente: $H \cap R_n < R_n$

$$\Rightarrow H \cap R_n = \langle r^k \rangle \qquad k \mid n$$

$$\underbrace{H \cap R_n < \overset{\text{niente}}{\text{in mezzo}} < H}_{2}$$

$$\Rightarrow H = \langle H \cap R_n, \text{ qualunque elemento di } H \setminus R_n \rangle$$

$$= \langle r^k, r^h s \rangle \quad (\simeq D_{n/k})$$

Esempio:
$$H_1 = \langle r^2, rs \rangle$$
$$\parallel$$
$$H_2 = \langle r^2, r^3 s \rangle$$
$$\parallel$$
$$H_3 = \langle r^2, r^5 s \rangle$$

Def. $H_{k,h} = \langle r^k, r^h s \rangle$ dove $k \mid n$ e $0 \leq h \leq k-1$

Prop. Gli $H_{k,h}$ così definiti sono $\boxed{\text{tutti}}$ i sottogp. di D_n non contenuti in R_n (inoltre sono tutti diversi)

fatto

Dim Si ha

$$H_{k,h} = \{ \underbrace{r^{ik}}_{\text{Sono } n/k \text{ elementi distinti}}, \overbrace{r^{h+ik} s}^{\text{tutti distinti, } n/k} \mid 0 \leq i < n/k \}$$

Sono nel gruppo

si verifica che è un sottogruppo

$$r^{h+ik} s = (r^k)^i \cdot r^h s$$

$$(r^k)^i \in H_{k,h}, \quad r^h s \in H_{k,h}$$

Voglio ora vedere che $(k_1, h_1) \neq (k_2, h_2)$ implica $H_{k_1,h_1} \neq H_{k_2,h_2}$

- Se $k_1 \neq k_2 \implies |H_{k_1,h_1}| = n/k_1 \neq n/k_2 = |H_{k_2,h_2}|$
- Se $k_1 = k_2 = k$ (ma $h_1 \neq h_2$), allora

$$r^{h_1}s \in H_{k,h_1} \quad \text{ma} \quad \underbrace{r^{h_1}s \notin H_{k,h_2}}$$

$\hookrightarrow$ se $r^{h_1}s \in H_{k,h_2}$ si avrebbe

$$h_1 \equiv h_2 \mod k$$

ma $0 \le h_1, h_2 < k \Rightarrow h_1 = h_2$, assurdo.

Quali fra questi sono normali?

- $H < R_n$: sarà normale?

Def G un gruppo, H sottogp.

$N_G(H)$ = il più grande sg di G in cui H è normale

$$= \{ g \in G : gHg^{-1} = H \}$$

Oss $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$

$H = \langle r^k \rangle$ è normale. Verifica:

* $rHr^{-1} = H$? OK!

* $sHs^{-1} = H$?

Sia r^{ki} un elemento di H. Allora

$$s\left(r^{ki}\right)s^{-1} = \left(s r s^{-1}\right)^{ki}$$
$$= \left(r^{-1} s s^{-1}\right)^{ki}$$
$$= r^{-ki} \in H.$$

$\Rightarrow N_G(H) \ni r, s \Rightarrow N_G(H) \supseteq \langle r, s\rangle = G$

- E gli $H_{k,h}$ sono normali?

$$\underset{r^h s}{\overset{\cup}{H_{k,h}}} = \langle r^k, r^h s\rangle$$

Se $\underbrace{H_{k,h}}_{H} \trianglelefteq G, \quad \forall g \in G \quad g H_{k,h} g^{-1} = H_{k,h}$.

In particolare $\begin{pmatrix} g = r \\ r^h s \end{pmatrix}$ si avrebbe

$$r \cdot (r^h \cdot s) \cdot r^{-1} \in H$$
$$\parallel$$
$$r^{h+2} s \in H$$
$$r^h s \in H$$
$$\Rightarrow r^2 \in H$$

Possibilità 1: n è dispari

$r^2 \in H \Rightarrow r \in H$, $r^h s \in H \Rightarrow H = D_n$

Possibilità 2: n pari

H contiene $\langle r^2, r^h s \rangle$ (che ha n elementi)

H è uno dei seguenti:

$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \langle r^2, s \rangle \lhd D_n \\ \bullet \ \langle r^2, rs \rangle \lhd D_n \end{array}\right\}$ indice 2.

- $\langle r, s \rangle = D_n \lhd D_n$

Centro di D_n

Def. G gruppo. Il CENTRO di G è

$$Z(G) = \{ g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G \}$$

Def G gruppo, $g \in G$

$$C_G(g) = \{ h \in G \mid gh = hg \}$$

Oss $g \in Z(G) \iff C_G(g) = G$

$\iff$ g commuta con un insieme di generatori di G.

Torno al diedrale

① $g = r^h s$

$$gs \overset{?}{=} sg \iff r^h = s r^h s$$
$$= (srs)^h$$
$$= r^{-h}$$

Questo accade se e solo se $n \mid 2h$

$$gr \overset{?}{=} rg \iff r^h s r \overset{?}{=} r^{h+1} s$$
$$\iff r^{h-1} s \overset{?}{=} r^{h+1} s$$
$$\iff id = r^2 \qquad \underline{\underline{NO}} \quad (n \geq 3)$$

NESSUNA SIMMETRIA STA IN $Z(D_n)$.

② $g = r^k$

$$gs \overset{?}{=} sg \iff r^k s = s r^k$$

$$\iff s r^k s = r^k$$

$$\iff r^{-k} = r^k \iff n \mid 2k$$

* Se n è dispari, $n \mid k$ e $g = id$
* Se n è pari, $n/2 \mid k \Rightarrow g = id$ o $r^{n/2}$

CONCLUSIONE

$$Z(D_n) = \begin{cases} \{id\} & \text{se } n \equiv 1 \ (2) \\ \{id, r^{n/2}\} & \text{se } n \equiv 0 \ (2) \end{cases}$$

Gruppi diedrali come prodotti diretti

$$D_{2m} \simeq D_m \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ ?$$

Sì se m dispari $\quad H_{2,0}$

NO se m pari

Vogliamo H, K sottogp normali con

(i) $H \cap K = \{id\}$

(ii) $HK = D_{2m}$

Scelgo $H = \langle r^2, s \rangle$ e $K = \langle r^m \rangle \simeq \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$

$$\underset{\displaystyle D_m}{\wr} \qquad\qquad \underset{\displaystyle Z(D_{2m})}{\parallel}$$

(i) $H \cap K = \{e\}$

se m dispari

(ii) $HK = \{hk : h \in H, k \in K\} = G$

$\underset{\text{Teo ieri}}{\Longrightarrow}$ $D_{2m} \simeq D_m \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$ se m dispari

Con m pari, $D_{2m} \not\simeq D_m \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$

① confrontiamo i centri

a sx: $Z(D_{2m}) = 2$

a dx: $Z(D_m \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z})^2$

$$\parallel$$

$$\{(id, 0), (id, 1), (r^{m/2}, 0), (r^{m/2}, 1)\}$$

② D_{2m} ha elem. di ordine $2m$

mentre il max ordine di un elemento in $D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è n.

GRUPPO SIMMETRICO

Def. $n \in \mathbb{N}$. Il gruppo simmetrico S_n e'

$$S_n = \{ f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \}$$

bigettive.

Prima notazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Notazione in cicli

$$(1 \to 3 \to 4 \to 7)\,(2 \quad 5)\,(6)$$

$f(1)=3 \qquad f(4)=7 \qquad f(2)=5$

$f(3)=4 \qquad f(7)=1 \qquad f(5)=2$

$$(1\,3\,4\,7)(2\,5)(6) \circ (1\;3\;5\;7)(2\;4\;6)$$

$$\tau = (1\;4\;6\;5)(2\;7\;3)$$

$$\tau^3 = (1\;5\;6\;4)\;(2)(7)(3)$$