ALGEBRA 1 - 2 OTT 2018

Note Title 10/2/2018

Azioni di un gruppo su un insieme (II).

G gruppo, X insieme

Azione: omomorfismo $\varphi : G \to S(X)$

$$\mathrm{Stab}(x) = \{ g \in G \mid \varphi_g(x) = x \} < G \qquad (x \in X)$$
$$\mathrm{Orb}(x) = \{ \varphi_g(x) \mid g \in G \} \subseteq X \qquad (x \in X)$$

(Le orbite formano una partizione di X).

Fatti:

1. $\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \iff g\,\mathrm{Stab}(x) = h\,\mathrm{Stab}(x)$
2.

Da 1 segue che le possibili immagini $\varphi_g(x)$ (cioè gli elementi dell'orbita) sono in corrispondenza biunivoca con le classi laterali sinistre dello stabilizzatore di x.

<u>Oss.</u> Se G è un gruppo FINITO, si ha la formula

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)|\,|\mathrm{Orb}(x)|$$

e quindi $|\mathrm{Stab}(x)|$ e $|\mathrm{Orb}(x)|$ sono dei DIVISORI dell'ordine di G.

Esempio: L'azione di coniugio di G su $X = G$.

$$\varphi : G \longrightarrow S(G)$$
$$g \longmapsto \varphi_g$$ automorfismo interno associato a g

$$\varphi_g(x) = g x g^{-1}.$$

$G = S_3$

$x = e \qquad Stab(e) = S_3 \qquad Orb(e) = \{e\}$

$x = (ab) \qquad Stab(x) = \{g \in S_3 \mid g x g^{-1} = x\}$
$= \{g \in S_3 \mid gx = xg\} = \underset{\text{centralizzatore di } x}{Z(x)}$

$Z((ab)) = \{e, (ab)\} \qquad |Stab((ab))| = 2$
$\Rightarrow |Orb((ab))| = 3$
$Orb((ab)) = \{(12), (13), (23)\}$

$x = (abc) \qquad Z((abc)) = \{e, (abc), (acb)\}$
$|Z((abc))| = 3 \quad \Rightarrow |Orb(x)| = 2$
$Orb((abc)) = \{(123), (132)\}$

Notazione: per l'azione di coniugio le orbite si dicono classi di coniugio $(cl(x))$.

Sempre coniugio, $G = D_4 = \langle r, s \rangle$
$r^4 = s^2 = e \qquad sr = r^{-1}s$
$Z(D_4) = \{e, r^2\}.$

$x = e, r^2 \qquad Z(x) = \underset{8}{D_4} \qquad Orb(x) = \underset{1}{\{x\}}.$

$x = r, r^3$

$Z(x) \supseteq \underset{4 \text{ el.}}{\langle r \rangle} \quad (\supseteq \langle r^3 \rangle)$

$\Rightarrow Z(x) = \langle r \rangle$ (4 el.)

$\Rightarrow |Orb(x)| = 2$.

Classi laterali di $Z(x)$: $\quad Z(x) = \langle r \rangle$

$s\,Z(x)$

$e \in Z(x) \qquad exe^{-1} = x$

$srs^{-1} = ssr^{-1} = s^2 r^{-1} = r^{-1} = r^3$

$cl(r) = \{r, r^3\} = cl(r^3)$

s simmetria qualsiasi.

$Z(s) = \{e, s, r^2, r^2 s\} \qquad$ 4 el.

$\Rightarrow Orb(s)$ ha 2 elementi

Un elemento è s stesso.

Per trovare l'altro elemento basta fare

$rsr^{-1} = rrs = r^2 s$

$Orb(s) = \{s, r^2 s\}$

$(Orb(rs) = \{rs, r^3 s\})$

Coniugio sui sottogruppi.

G gruppo, X = insieme dei sottogruppi di G

Azione: coniugio

$\varphi : G \to S(X)$

$g \mapsto \varphi_g$

$\varphi_g(H) = gHg^{-1}$

$\mathrm{Stab}(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$

Si chiama anche NORMALIZZATORE di H.

$N(H)$

$\mathrm{Stab}(H) = G \iff H \trianglelefteq G$

$$|N(H)| \cdot |\mathrm{Orb}(H)| = |G| \quad (\text{se } |G| < \infty)$$

$\Rightarrow$ Il numero dei sottogruppi coniugati ad H è uguale all'indice del normalizzatore di H.

Di nuovo G gruppo, X = insieme dei sottogruppi di G. Azione di $\mathrm{Aut}(G)$ su X.

$$\varphi : \mathrm{Aut}(G) \to S(X)$$

$$\mathrm{Aut}(G) \ni f \mapsto \tilde{f} : X \to X$$

$$\tilde{f}(H) = f(H)$$

I sottogruppi caratteristici di G sono i sgr H per cui $\forall f \in \mathrm{Aut}(G)$ si ha $f(H) = H$.

e sono quelli per cui $\mathrm{Stab}(H) = \mathrm{Aut}(G)$.

$G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 = \mathbb{F}_p^2$ (s.v. su $\mathbb{F}_p$ di dimensione 2)

$\mathrm{Aut}(G) = GL_2(\mathbb{F}_p)$

X = sottogruppi di $\mathbb{F}_p^2$.

$\{0\}$, rette, $\mathbb{F}_p^2$

$\{0\}$ $\downarrow$ car.

$\mathbb{F}_p^2$ $\downarrow$ car

retta $= \langle v \rangle = H$ p.es. $v = (1,0)$

$Stab(H)$: sono matrici della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda \neq 0 \quad b \neq 0 \\ a \text{ qualsiasi} \end{matrix}$$

$|Stab(H)| = (p-1)^2 p$.

$|GL_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2-1)(p^2-p) = (p-1)^2 p (p+1)$

$|Orb(H)| = p+1$. (tutte le rette).

Permutazioni (di un insieme finito).

$$X = \{1, \dots, n\}$$

S_n = permutazioni di X.

Azione $\varphi : S_n \to S(X) \cong S_n$

φ = identità.

Consideriamo un elemento $\sigma \in S_n$.

e consideriamo $H = \langle \sigma \rangle$

Restringiamo l'azione φ al sottogruppo H.

Descriviamo le orbite di H

$$\{1, \dots, n\} = X_1 \cup \underset{\substack{\downarrow \\ \text{orbite}}}{X_2} \cup \dots \cup X_k$$

Scegliamo un'orbita $X = X_1$ (p.es.)

Sia $x \in X$.

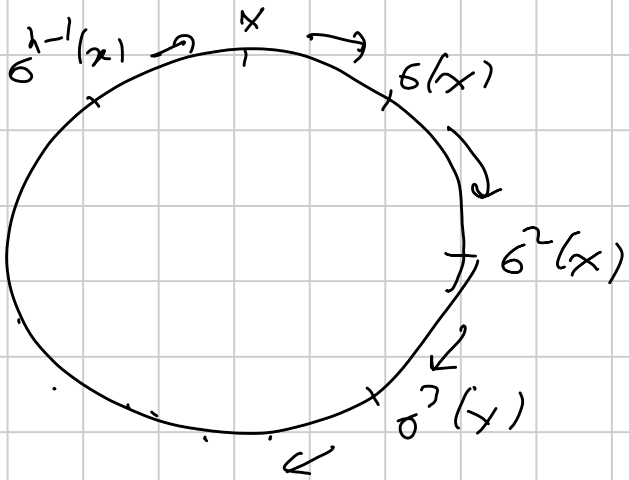
$Orb(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$

dove h è il minimo esponente positivo per cui $\sigma^h(x) = x$.

Infatti, prendendo questo h, le potenze $\sigma^i(x)$ si ripetono con periodo h.

D'altra parte se $0 \le i < j < h$ si ha $\sigma^i(x) \neq \sigma^j(x)$

(altrimenti avrei $\sigma^{j-i}(x) = x$ ASSURDO).

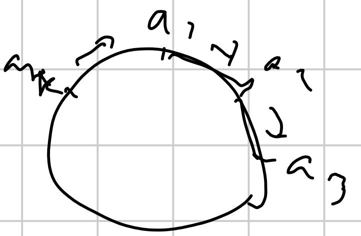


azione di σ sull'orbita

CICLO (di lunghezza h)

Notazione: $(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{h-1}(x))$

$(a_1, a_2, \dots, a_h)$



Conseguenza: ogni permutazione si scrive IN MODO UNICO (a meno dell'ordine) come prodotto di cicli disgiunti.

(disgiunti $\rightarrow$ agiscono su sottoinsiemi disgiunti)

Quindi i <u>cicli</u> (cioè le permutazioni del tipo $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ che permutano ciclicamente gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_k$ e lasciano fissi tutti gli altri) sono un insieme di GENERATORI del gruppo S_n

Def. Una trasposizione è un ciclo su 2 elementi (di lunghezza 2).

$$\sigma = (a\,b)$$

Considero, per esempio, il ciclo $(1,2,3,4,5)$

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\,2) \\
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\,3) \\
2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \\
 & & & & & (1\,4) \\
2 & 3 & 4 & 1 & 5 & \\
 & & & & & (1\,5) \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 &
\end{array}$$

Conseguenza: ogni permutazione si può scrivere (non necessariamente in modo unico) come prodotto di trasposizioni.

→ Le trasposizioni sono un insieme di generatori di S_n.

Se $\sigma = (a_1 b_1) \dots (a_h b_h) = (c_1 d_1) \dots (c_k d_k)$ non è detto che $h = k$

Es. $(1\,2)(2\,3)(1\,2) = (1\,3)$

Prop. La funzione

$$f : S_n \to \{\pm 1\}$$

definita da

$$f(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

è un omomorfismo surgettivo.

Oss. In effetti la funzione è a valori in $\{\pm 1\}$.

Dim È un omomorfismo

$$f(\sigma\tau) = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{i-j}$$

$$= \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}$$

$$= \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j} \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}$$

$$= f(\sigma) f(\tau).$$

Vediamo ora che, per ogni trasposizione $\sigma = (a\,b)$, si ha $f(\sigma) = -1$.

Divido le coppie in questo modo:

① - $\{i,j\} = \{a,b\}$

② - $\{i,j\} = \{a,j\}$ oppure $\{i,j\} = \{b,j\}$
$j \neq \cancel{b}$ con $j \neq a$

③ - $\{i,j\} \cap \{a,b\} = \emptyset$.

① $$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(a) - \sigma(b)}{a-b} = \frac{b-a}{a-b} = -1.$$

2° caso $\{i,j\} = \{a,j\}$

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(a)-\sigma(j)}{a-j} = \frac{b-j}{a-j}$$

$\{i,j\} = \{b,j\}$

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(b)-\sigma(j)}{b-j} = \frac{a-j}{b-j}$$

Si semplificano a coppie → prodotto totale $= 1$.

(3) $\{i,j\} \cap \{a,b\} = \emptyset$

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{i-j}{i-j} = 1$$

TOTALE : $f((a\,b)) = -1$.

$-1 \in \operatorname{Im} f$

Conclusione $\sigma = (a_1 b_1) \dots (a_k b_k)$

$f(\sigma) = (-1)^k$

$\Rightarrow$ k è sempre pari o sempre dispari.

$\ker f = A_n$ = sottogruppo alterno su n elementi (sgr delle permutazioni pari)