GRUPPO SIMMETRICO

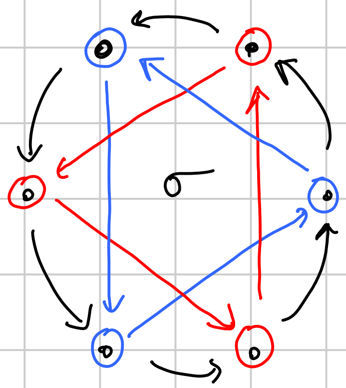
Note Title 10/3/2018

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)$$
$$= (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

Sia σ un ciclo. Qual è la decomp. in cicli di σ^2?

Se $\mathrm{ord}(\sigma)$ è dispari, σ^2 è ancora un ciclo della stessa lunghezza di σ

Se $\mathrm{ord}(\sigma)$ è pari, σ^2 è il prodotto di 2 cicli di lunghezza $\mathrm{ord}(\sigma)/2$



Oss Sia $G \circlearrowright G$ per coniugio. Gli Stab NON sono in generale normali in G

$G \circlearrowright X$ vuol dire: c'è un'azione del gruppo G sull'insieme X

[Azione di G su un insieme X:

dare una funzione $G \times X \xrightarrow{f} X$

che rispetti $f(g_2, f(g_1, x)) =$

$$= f(g_2 \cdot g_1, x)$$

$$g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$$
$$e \cdot x = x \;]$$

Coniugio: $g \in G$ agisce su $h \in G$ mandandolo in $g h g^{-1}$

Se $G = S_3$ e $g = (1\ 2)$,

$$\mathrm{Stab}(g) = \{ h \in S_3 \mid h (1\ 2) h^{-1} = (1\ 2) \}$$

$$= \{ id, (1\ 2) \}$$

Azione di coniugio in S_n

$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ $\qquad \tau = (1, 3, 5)$

Calcoliamo $(\sigma \tau \sigma^{-1})(\sigma(i))$

$$= \sigma \tau (i) = \sigma(\tau(i))$$

$$(\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5))\ (\sigma(2))\ (\sigma(4))(\sigma(6))(\sigma(7))$$
$$= (2, 4, 6)$$

In generale: se

$$\tau = (c_{1,1} \ \dots \ c_{1,\ell(1)})\ (c_{2,1}, \dots, c_{2,\ell(2)}) \ \dots \ (c_{k,1} \ \dots \ c_{k,\ell(k)})$$

e σ e' una permutaz. qualunque, allora

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(c_{1,1}) \ \dots \ \sigma(c_{1,\ell(1)})) \ \dots \ (\sigma(c_{k,1}) \ \dots \ \sigma(c_{k,\ell(k)}))$$

Esempio $\sigma = (1, 2, 5, 3, 7)$ $\tau = (1,2)(3,5)$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \left[= (\sigma(1), \sigma(2))\ (\sigma(3), \sigma(5))\right]$$
$$= (2, 5)\ (7, 3)$$

Come si dimostra?

Siamo in S_n. Si ha

$$\{1, \dots, n\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$$

Voglio elencare tutte le coppie $i, \sigma\tau\sigma^{-1}(i)$

Basta elencare tutte le coppie

$$\sigma(j), \quad \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(j)) = \sigma(\tau(j))$$

che e' quello che abbiamo fatto. "$\square$"

Classi di coniugio in S_n

$\tau =$ (ciclo di lungh ℓ_1) ... (lungh. ℓ_k)

$\sigma\tau\sigma^{-1}$ ha la medesima decomposizione in cicli

Ad esempio, $(1\ 2\ 3)$ e $(1\ 2)(4\ 5)$ di S_5 stanno in classi di coniugio diverse

Viceversa, se σ_1 e σ_2 hanno la stessa decomposizione in cicli, allora sono coniugate

Esempio: $\sigma_1 = (1\ 2)\ (4\ 5)(3)$ sono coniugate
$\sigma_2 = (3\ 5)\ (2\ 4)(1)$ in S_5

Ovvero: $\exists\, g \in S_5$ t.c. $\sigma_2 = g\sigma_1 g^{-1}$

$\shortparallel$

$$\parallel$$

$$\big(g(1)\ g(2)\big)\big(g(4)\ g(5)\big)$$

Basta prendere $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

E se $\sigma_1 = (1\ 2\ 4)(3\ 5)$

$\sigma_2 = (3\ 5\ 2)(1\ 4)$?

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Unicità (o meno) di g

$$\left.\begin{aligned} g\sigma_1 g^{-1} &= \sigma_2 \\ h\sigma_1 h^{-1} &= \sigma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g\sigma_1 g^{-1} = h\sigma_1 h^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(h^{-1}g)\sigma_1 = \sigma_1(h^{-1}g)$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(\sigma_1)$$

$$\Leftrightarrow g\,\mathrm{Stab}(\sigma_1) = h\,\mathrm{Stab}(\sigma_1)$$

Le scelte possibili per g sono parametrizzate da $\mathrm{Stab}(\sigma_1)$

Proposizione In S_n ogni classe di coniugio è formata da tutte e sole le permutazioni con una data decomposizione in cicli

Esempio: classi di coniugio in S_5

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 = 3+1+1 \\
&= 2+2+1 = 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Classi di coniugio: $\{5\text{-cicli}\}$

$\{4\text{-cicli}\}$

$\{(3\text{-ciclo})(\text{trasp})\}$ $\{3\text{-ciclo}\}$

$\{(\text{trasp})(\text{trasp})\}$ $\{\text{trasposizioni}\}$

$\{\text{identità}\}$

\# elementi: $\#\{5\text{-cicli}\} = 4! = \dfrac{5!}{5}$

scrivo tutte le possibili 5-uple ordinate; 5 a 5 rappresentano lo stesso 5-ciclo

$\#\{4\text{-cicli}\} = 5 \cdot 3! = 30$

$$\#\{3\text{-cicli}\} = \binom{5}{3} \cdot 2 = 20$$

$$\#\{2\text{-cicli}\} = \binom{5}{2} \cdot 1! = 10$$

$$\#\{\text{coppie di trasposizioni}\} = 5 \cdot 3$$

$$3 = \frac{1}{2}\binom{4}{2}$$

$$(1\ 2)(3\ 4)$$
$$(1\ 3)(2\ 4)$$
$$(1\ 4)(2\ 3)$$

$$\#\{(3\text{-ciclo})(2\text{-ciclo})\} = \binom{5}{3} \cdot 2 = 20$$

Parità $\operatorname{sgn}(n\text{-ciclo}) = (-1)^{n-1}$

$$(1\ 2\ \dots\ n) = (1\ n)\dots(1\ 3)(1\ 2)$$

$$\#\{\text{elementi pari in } S_n\} = \#\{5\text{-cyc}\}$$
$$+ \#\{3\text{-cyc}\}$$
$$+ \#\{\text{identità}\}$$
$$+ \#\{(\text{trasp})(\text{trasp})\}$$

$$= 24 + 20 + 1 + 15 = 60 = \frac{5!}{2}$$

$$\#\ker\left(\operatorname{sgn}: S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) = \frac{\# S_n}{\# \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \frac{n!}{2}$$

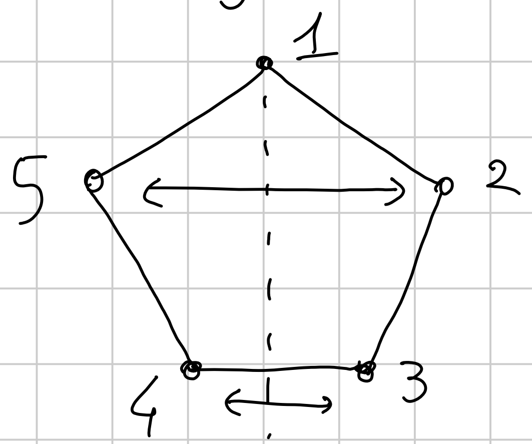
Gruppo alternante $A_n = \ker \operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Un sottogruppo di S_5

$$G = \langle \underbrace{(1,2,3,4,5)}_{r}, \ \underbrace{(2,5)(3,4)}_{s} \rangle < S_5$$

- $\# G < 120$, perché $G < A_5$
- $10 \mid \# G \mid \# A_5 = 60$
- $G \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$? No, perché S_5 non ha elementi di ordine 10
- $s r s^{-1} = (1, 5, 4, 3, 2) = r^{-1}$

Quindi è D_5!



Teorema di Cayley

Sia G un gruppo di ordine n. Allora esiste un omomorfismo INIETTIVO $G \hookrightarrow S_n$.

Dim Idea: voglio pensare S_n come l'insieme delle permutazioni dell'insieme G.

Dato $g \in G$ voglio costruire una permutazione degli elementi di G.

Considero l'applicazione
$$\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$$

φ_g è una permutazione: infatti è iniettiva, perché
$$\varphi_g(h_1) = \varphi_g(h_2) \iff gh_1 = gh_2 \iff h_1 = h_2$$

Abbiamo quindi una funzione
$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S_n = S_G \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array}$$

Vorrei vedere che sia un omomorf. di gp.

ovvero $\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$

$$\varphi_{g_1 g_2} \overset{?}{=} \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$$

$$\iff \forall h \in G \quad \underset{\displaystyle g_1 g_2 \cdot h}{\underset{\parallel}{\varphi_{g_1 g_2}(h)}} = \varphi_{g_1}\Big(\varphi_{g_2}(h)\Big)$$

$$\varphi_{g_1}\Big(\varphi_{g_2}(h)\Big) = \varphi_{g_1}(g_2 h) = g_1 g_2 h$$

Φ è iniettiva: supponiamo $\Phi(g) = id$

$$\iff \varphi_g = id \iff$$

$$\forall h \in G \quad \varphi_g(h) = id(h)$$

$$gh = h \iff g = id_G$$

$\square$

$G \circlearrowleft G$ per moltiplicazione a sx

$\rightsquigarrow \quad G \longrightarrow S_G$, ed è iniettivo

Sottogruppi di indice p

G gruppo finito, p = più piccolo primo che divide $\# G$, $H < G$, $[G : H] = p$.

Allora $H \lhd G$

Dim. Azioni ragionevoli:

* $G \circlearrowleft$ coniugio sui suoi sottogp, si cerca di dim che $\mathrm{Stab}(H) = G$
* $G \circlearrowleft G/H$ < per moltiplicazione / per coniugio

$$G/H = \{gH\}$$

Dato gH e $x \in G$, posso considerare

$$xgH, \quad gHx^{-1}, \quad xgHx^{-1}$$

Tentiamo la seconda strada, prendendo la molt. a sx

$$G \circlearrowleft G/H \rightsquigarrow \Phi : G \longrightarrow \mathrm{Permutaz}(G/H) \cong S_p$$

$\ker \Phi$, $|\mathrm{Im}\,\Phi|$ divide $p!$

$|\mathrm{Im}\,\Phi|$ divide $|G|$

$\Rightarrow |\mathrm{Im}\,\Phi|$ divide $(p!, |G|) = p$

$$\Rightarrow |\ker \Phi| = \frac{|G|}{p} = |H|$$

Cerchiamo di dim. una fra $\ker \Phi \supseteq H$

e $\ker \Phi \subseteq H$.

Ovvero: voglio sapere per quali $x \in G$ vale

$$x(gH) = gH \qquad \forall g \in G$$

In particolare deve valere $xH = H \Rightarrow x \in H$

$\Rightarrow \ker \Phi \subseteq H$, ma hanno la stessa

cardinalità, e quindi coincidono

$$\Rightarrow H = \ker \Phi \triangleleft G \qquad \square$$