Azioni di gruppi

Dalla volta scorsa

G gruppo finito, $H < G$, $[G:H] = p$,

$p =$ più piccolo primo che divida $|G|$.

Allora H è normale in G

Dim. alternativa

$$X = \{\text{sottogruppi di } G\}$$

$G \circlearrowleft X$ per coniugio: dati $g \in G$ e $K < G$,

$$g \cdot K := g K g^{-1}$$

$$H \text{ è normale} \iff \underbrace{\mathrm{Stab}(H)}_{N_G(H)} = G$$

Fatto 1: $\underbrace{\overbrace{H \subseteq N_G(H)}^{a} \overbrace{\subseteq G}^{b}}_{p}$

Due casi: o $H = N_G(H)$ o $N_G(H) = G$.

Nel secondo caso abbiamo vinto.
Per assurdo supponiamo $N_G(H) = H$.

$$|\text{Orbita}(H)| \cdot |\text{Stab}(H)| = |G|$$

$$\Rightarrow |\text{Orb}(H)| = |G| / |H| = p$$

Considero l'azione (per coniugio) di G sui

p coniugati di H

$$\rightsquigarrow \Phi : G \longrightarrow S_p$$

$|\text{Im}\ \Phi|$ divide $(S_p, |G|) = p$

$$\Rightarrow |\ker \Phi| = \frac{|G|}{|\text{Im}\ \Phi|} = |G|/p = |H|$$

Chiaramente $\ker \Phi \subseteq \text{Stab}(H) = H$

Contenimento + uguaglianza cardin. $\Rightarrow$ uguagl.

$\Rightarrow \ker \Phi = H \trianglelefteq G$, assurdo (quindi H era normale!) ☒

Gruppi di ordine p^2

$|G| = p^2 \Rightarrow G$ abeliano

Sia $g \in G$. $\text{ord}(g) \in \{1, p, p^2\}$

Se trovo $g \in G$ di ord $= p^2$, G è ciclico,

quindi in particolare abeliano: OK. $G \simeq \mathbb{Z}/_{p^2}\mathbb{Z}$

Altrimenti ogni $g \in G \setminus \{e\}$ ha ordine p

Scelgo $g_1 \in G \setminus \{e\}$: sia $H_1 = \langle g_1 \rangle$.
$|H_1| = p$

Scelgo $g_2 \in G \setminus H_1$, pongo $H_2 = \langle g_2 \rangle$

- H_1, H_2 generano G: se $S < G$ contiene H_1, H_2,

  allora $|H_1| \mid |S| \mid |G|$

  $p \mid |S| \mid p^2$

  e non si può avere $|S| = p$ perché altrimenti

  $S = H_1$, assurdo

- $H_1 \triangleleft G$? $[G : H_1] = p^2/p = p$: per il

  lemma precedente, H_1 e H_2 sono normali

  in G

- $|H_1 \cap H_2| = 1$, perché $|H_1 \cap H_2| \mid p$ e non

  può essere p (altrim. $H_1 = H_2$)

- Dato $h \in H_1$ e $g \in H_2$ vorrei vedere che

$$g h \overset{\cancel{e}}{=} h g \iff g h g^{-1} = h$$

Sappiamo: $\underset{h^k}{\underset{\shortparallel}{g h g^{-1}}} \in H_1 \quad (H_1 \triangleleft G)$

$$g^2 h g^{-2} = g\, g h g^{-1} g^{-1} = g h^k g^{-1}$$

$$= \underbrace{C_g}_{\text{automorfismo "Coniugare per } g\text{"}} (h^k) = C_g(h)^k = h^{k^2}$$

$$g^i h g^{-i} = h^{k^i}$$

$$g(g^i h g^{-i}) g^{-1} = g(h^{k^i}) g^{-1}$$

$$= (g h g^{-1})^{k^i} = h^{k^{i+1}}$$

Scegliendo $i = p$ trovo

$$h = g^p h g^{-p} = h^{k^p}$$

ord $h = p$
$\iff$ $\quad k^p \equiv 1 \mod p \iff k \equiv 1 \ (p)$

Quindi: $ghg^{-1} = h^k = h$

$\Longrightarrow \quad G \simeq H_1 \times H_2 \Longrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/_{p}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{p}\mathbb{Z}$

$\square$

Gruppi di ordine 2d

Sia G un gruppo di ordine $2d$, d dispari.

Tesi: G contiene un sottogp di ordine d.

Dim. Teo Cayley: G è isomorfo ad un sottogruppo di S_{2d}

Posso considerare $G \cap A_{2d}$: vorrei dire che ha indice 2 in G

$A_{2d} = \ker(\text{sgn})$

$* \quad \text{sgn}: S_{2d} \longrightarrow \{\pm 1\}$ omomorf.

$$G \cap A_{2d} = \ker(\text{sgn}|_G)$$

$$|G \cap A_{2d}| = |\ker(\text{sgn}|_G)| = \frac{|G|}{\text{Im}(\text{sgn}|_G)}$$

$$|G|, \; |G|/2$$

I due casi accadono:

1° caso $\iff$ $\mathrm{sgn}|_G$ è l'omom. banale

$\iff$ $G \subseteq A_{2d}$.

2° caso $\iff$ $G \not\subseteq A_{2d}$

Cayley: $g \in G \rightsquigarrow \varphi_g : G \longrightarrow G$, $h \longmapsto gh$.

[$\sigma = (2\ 7)(3\ 5)(1\ 9) \in S_9$

ha ordine 2]

Per Cauchy con $p=2$, G contiene un elemento di ordine 2, chiamiamolo g

$$\left.\begin{tikzcd} e \arrow[r, bend left] & g \arrow[l, bend left] \\ h_1 \arrow[r, bend left] & gh_1 \arrow[l, bend left] \\ \vdots & \\ h_{d-1} \arrow[r, bend left] & gh_{d-1} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}\right\}$$

d coppie
$\parallel$
d orbite dell'azione di g per molt a sx.

Il φ_g corrispondente e' quindi un prodotto di d trasposizioni $\Rightarrow$ $\mathrm{sgn}(\varphi_g) = (-1)^d = -1$

$\Rightarrow$ G non e' contenuto in A_{2d}.

$\Rightarrow$ $|G \cap A_{2d}| = d$ $\square$

ANCORA GRUPPO SIMMETRICO

Coniugio sui sottogruppi ciclici

$H < S_7$, $H = \langle (1, 2, \dots, 7) \rangle$

$S_7 \circlearrowleft \{ \text{sottogp di } S_7 \}$ per coniugio

$\mathrm{Orb}(H)$, $\mathrm{Stab}(H)$

$\hookrightarrow$ Sono tutti e soli i sottogruppi generati da un 7-ciclo

(soli: $|gHg^{-1}| = |H|$

tutti: porto $(1,2,\dots,7)$ in un generatore di ogni altro sgp $\simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)

$$|\mathrm{Orb}(H)| = |\{\text{sgp ciclici ord} = 7\}| =$$

$$= \frac{|\{7\text{-cicli in } S_7\}|}{\varphi(7)} = \frac{7!/7}{6}$$

$$= 5!$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ N_{S_7}(H)}}{|\mathrm{Stab}(H)|} = \frac{|S_7|}{|\mathrm{Orb}(H)|} = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6$$

Si ha sempre $H < N_{S_7}(H)$

Cerco un elemento di ordine 2 in $\mathrm{Stab}(H)$, lo chiamo s

$$s H s^{-1} = H$$

$$s(1, 2, \dots, 7)s^{-1} = (1, 2, \dots, 7)^k$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ (1, \_, 7)}}{s^2 (1, \_, 7) s^{-2}} = \underset{\substack{\parallel \\ (1, \_, 7)^{k^2}}}{s (1, \_, 7)^k s^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \quad k^2 \equiv 1 \ (7) \implies k \equiv \pm 1 \ (7)$$

Sotto-esercizio: il centralizzatore di $(1, \_, 7)$

$$|\mathrm{Centr}(1, \_, 7)| = |\mathrm{Stab}(1, \_, 7) \text{ per}$$

l'azione di coniugio sugli elementi $|$

$= |S_7| / |Orb(1, -, 7)| = \dfrac{7!}{6!} = 7$

$\Rightarrow$ Centr $(1, -, 7) = \langle (1, -, 7) \rangle$

Sottoesercizio $\Rightarrow$ se $s(1, -, 7)s^{-1} = (1, -, 7)^k$

k non può essere 1, quindi deve essere -1.

$s(1,2,3,4,5,6,7)s^{-1} = (1,7,6,5,4,3,2)$

$\|$

$(s(1), s(2), s(3), s(4), s(5), s(6), s(7))$

$s(1) = 1$, $\quad s(2) = 7$, $s(7) = 2$

$s(3) = 6$, $s(6) = 3$

$s(4) = 5$, $s(5) = 4$

Esercizio Trovare un elemento di ordine 3 in $N_{S_7}(H)$

Esercizio Determinare gli n interi per cui S_n contiene un sottogp. di ordine 21

Soluzione * Se $H < S_n$ ha ordine 21,

$21 = |H| \;\Big|\; |S_n| = n! \Rightarrow 7 \mid n! \Rightarrow n \geq 7$

* $n \geq 10$ va bene: ci sono $(1, \_, 7)$ e il 3-ciclo $(8, 9, 10)$ OK

* Se funziona per n funziona per tutti gli n più grandi $(S_n \hookrightarrow S_{n+1} \hookrightarrow S_{n+2} \ldots)$

* Se c'è $H < S_n$ con $n = 7, 8, 9$ e $|H| = 21$, H contiene un 7-ciclo σ. Sia $K = \langle \sigma \rangle$.

$$\underset{\langle (1, \_, 7) \rangle}{\overset{}{K}} \triangleleft H$$ perché di indice 3

$K = \langle (1, \_, 7) \rangle \Rightarrow H$ deve essere contenuto in $N_{S_n}(K)$

In particolare, se $n = 7$, $H < N_{S_7}(K)$, che ha 42 elementi. Ma un gp di ordine 42 contiene sempre un sgp di ordine 21!

(Infatti $42 = 2 \cdot 21$, 21 dispari)

$\Rightarrow$ S_7 contiene sgp di ordine 21

$\Rightarrow$ S_8, S_9 anche

Risposta: $n \geq 7$. $\square$

Centralizzatori in S_n

Considero $\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9) \in S_9$

$H = \text{Centr}(\sigma)$. Dim che $H \simeq \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Soluzione

$|H| = |$ Stab di σ per l'azione di coniugio sugli elementi $|$

$$= |S_9| \,/\, |\text{Orb}(H)| = \frac{9!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 4! = 24$$

$|\text{Orb}\,\sigma| = |\{\text{perm. tipo } 4 \text{ ciclo} \times 3 \text{ ciclo} \times \text{trasp}\}|$

$$= \binom{9}{4} 3! \times \binom{5}{3} \cdot 2! \times 1$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \cdot \cancel{6} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Sappiamo trovare 24 elementi di H?

$$(1,2,3,4)(5,6,7)(8,9)$$

H contiene $\quad (1,2,3,4)^i\,(5,6,7)^j\,(8,9)^k$

$$0 \le i \le 3; \quad 0 \le j \le 2; \quad 0 \le k \le 1$$

$$\Rightarrow \quad H \cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4-ciclo}}}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3-ciclo}}}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasp}}}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$