Azioni & S_N

Note Title 10/16/2018

Cauchy Sia G un gruppo finito, $p \mid |G|$

$$X = \{ (x_1, \dots, x_p) \in G^p \text{ t.c. } x_1 \cdots x_p = e \}$$

(i) $\# X = |G|^{p-1}$ (scelgo $x_1, \dots, x_{p-1}$ e x_p è determinato)

(ii) C'è un'azione di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ su X

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \longrightarrow (x_2, x_3, \dots, x_p, x_1)$$

Più precisamente: questa è l'azione di $\bar{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
L'azione di un generico $\bar{i}$ è data da:

$$[i] \cdot (x_1, \dots, x_p) = (x_{1+i}, x_{2+i}, \dots, x_{p+i})$$

dove gli indici si leggono mod p.

(iii) Come sono fatte le orbite?

Orbite da 1 elemento: $(x, \dots, x)$ con $x^p = e$
Orbite da p elementi

(iv) $$\# X = \sum_{r \in R} |\mathrm{Orb}(r)| =$$

$$= \# \{\text{orbite da } 1\} + p \, \# \{\text{orbite da } p\}$$

$$\#\{\text{orbite da } 1\} = \#X - p\,\#\{\text{orbite da } p\}$$
$$\equiv 0 - p\,(\text{roba}) \equiv 0 \ (p)$$

(v) C'è almeno un'orbita da 1, $(e, \dots, e)$

$\Rightarrow \#\{\text{orbite da } 1\} \geq 1$, ma è divisibile per p

$\Rightarrow \#\{\text{orbite da } 1\} \geq p$

$\Rightarrow \#\{\text{elementi di ordine } p\} \geq p-1 > 0$

(vi) In realtà:

$$\#\{\text{elt. ord } p\} = \#\{\text{orbite da } 1\} - \#\{(e, \dots, e)\}$$
$$\equiv -1 \pmod p \qquad \square$$

Equazione in S_{2p}.

Determinare i p per cui l'eqz

$$\sigma^p = (1, \dots, p)(p+1, \dots, 2p)$$

ha soluz. in S_{2p}

$\text{ord}(\sigma^p) = p \Rightarrow \text{ord}(\sigma) \mid p^2$, ma non $\mid p$, quindi è p^2

$\sigma^{p^2} = (\sigma^p)^p = e$

$p^2 = \text{ord}(\sigma) = \text{mcm}\{\text{lunghezze dei cicli}\}$

$\Rightarrow$ lungh dei cicli $\in \{1, p, p^2\}$

e c'e' almeno un ciclo di lungh $= p^2$

$\Rightarrow \quad p^2 \leq 2p \quad \Rightarrow \quad p = 2$

$\sigma^2 = (1\ 2)(3\ 4)$

$\sigma = \left(1 \ {3 \atop 4} \ 2 \ {4 \atop 3}\right)$

Soluzioni: $(1\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 4\ 2\ 3)$

Centralizzatori in S_n (e A_n)

$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ in $S_5 = G$

$H = \text{Centr}(\sigma)$

$\# H = |G| / \underbrace{\# \text{Orbita}(\sigma)}_{\text{per coniugio}} = \dfrac{5!}{4!} = 5$

$H = \langle \sigma \rangle$

E la classe di coniugio di σ in A_5?

$\underbrace{\# \text{ classe coniugio}}_{\text{in } A_5} = \# A_5 / \# \text{Centr}_{A_5}(\sigma)$

$$= \frac{\frac{1}{2} \# S_5}{\#\left(\mathrm{Centr}_{S_5}(\sigma) \cap A_5\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\# S_5}{\# \mathrm{Centr}_{S_5}(\sigma)}$$

$$= \frac{1}{2} \# \text{classe di coniugio in } S_5$$

Più in generale

(i) $\#$ classe di coniugio di σ in A_n $=$ $\begin{cases} \# \text{ classe di } \sigma \text{ in } S_n \\ \frac{1}{2} \# \text{ classe di } \sigma \text{ in } S_n \end{cases}$

(ii) caratterizzare i due casi

(i) $\#$ classe coniugio di σ in A_n $= \dfrac{\# A_n}{\# \mathrm{Centr}_{A_n}(\sigma)}$

$$= \frac{1}{2} \frac{\# S_n}{\#\left(\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \cap A_n\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\# S_n}{\# \mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} \# \mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma)}$$

$= \#\left(\begin{matrix}\text{classe coniugio} \\ \text{di } \sigma \text{ in } S_n\end{matrix}\right)$ oppure $\frac{1}{2} \#\left(\begin{matrix}\text{classe coniugio} \\ \text{di } \sigma \text{ in } S_n\end{matrix}\right)$. Infatti:

$$\#\left(\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \cap A_n\right) = \#\left(\ker \operatorname{sgn} : \mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$$

$$= \frac{\# \, Centr_{S_n}(\sigma)}{\# \, sgn\left(Centr_{S_n}(\sigma)\right)}$$

$$\left| H / \ker \varphi \right| = |Im \, \varphi|$$

$$|\ker \varphi| = \frac{|H|}{|Im \, \varphi|}$$

$$= \begin{cases} \# \, Centr_{S_n}(\sigma) \\ \frac{1}{2} \# \, Centr_{S_n}(\sigma) \end{cases}$$

— questo caso accade se e solo se $\# \, sgn\left(Centr_{S_n}(\sigma)\right) = 2$, ovvero se e solo se $Centr_{S_n}(\sigma)$ contiene una permutazione dispari

da qui segue che

$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{classe di coniugio} \\ \text{in } A_n \end{array} \right\} = \varepsilon \frac{\# S_n}{\# \, Centr_{S_n}(\sigma)} = \varepsilon \, \# \left\{ \begin{array}{l} \text{classe di} \\ \text{coniugio in } S_n \end{array} \right\},$$

con $\varepsilon \in \{1/2, 1\}$

(ii) Domanda: per quali σ $Centr_{S_n}(\sigma)$ contiene una permutaz dispari?

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7)(8, 9)$$

$$Centr_{S_n}(\sigma) \ni (6, 7), \text{ dispari}$$

Se $\sigma = \underbrace{(\ell_1)}_{c_1} \cdots \underbrace{(\ell_k)}_{c_k}$ (cicli disgiunti di lungh $\ell_1, \ldots, \ell_k$), allora

$$Centr_{S_n}(\sigma) \ni c_1, \ldots, c_k$$

Quindi: se almeno un ℓ_i è pari ho trovato un elemento dispari nel centralizzatore: è il ciclo c_i di lunghezza ℓ_i, che ha parità $(-1)^{\ell_i - 1} = -1$.

Consideriamo ora
$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$$

$$\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \ni (1,6)(2,7)(3,8)(4,9)(5,10)$$

In generale: se $\ell_i = \ell_j$ (con $i \neq j$) ed è dispari, trovo in $\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma)$ un elemento che è prodotto di ℓ_i trasposizioni: dati

$$c_i = (a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_{\ell_i})$$
$$c_j = (b_1 \;\; b_2 \;\; \dots \;\; b_{\ell_i})$$

l'elemento in questione è $(a_1 b_1)(a_2 b_2)\dots(a_n b_n)$, dispari (come permutazione) in quanto ℓ_i è dispari

Finora so che: se σ si scrive con almeno un ciclo di lunghezza pari o due cicli dispari della stessa lunghezza, allora

$$\{\text{classe di coniugio di } \sigma \text{ in } S_n\}$$
$$= \{\text{classe di coniugio in } A_n\}$$

Ora il viceversa Supponiamo σ = prodotto cicli di lungh. dispari, tutte diverse fra loro. $(\ast)$

$\sigma = (\ell_1) \dots (\ell_k)$. Voglio vedere che le classi di coniugio in S_n e A_n sono diverse.

$$\# \operatorname{Centr}_{S_n}(\sigma) = \frac{n!}{\# \text{classe di coniugio}} =$$

$$= \frac{n!}{\binom{n}{\ell_1}(\ell_1-1)!\binom{n-\ell_1}{\ell_2}(\ell_2-1)! \cdots \binom{\ell_k}{\ell_k}(\ell_k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{\frac{n!}{\ell_1!\,\cancel{(n-\ell_1)!}}\,\frac{\cancel{(n-\ell_1)!}}{\ell_2!\,\cancel{(n-\ell_1-\ell_2)!}}\,\cancel{} \cdots \frac{\cancel{}}{\ell_k!}(\ell_1-1)!\cdots(\ell_k-1)!}$$

$$= \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k$$

$$\operatorname{Centr}_{S_n}(\sigma) \supseteq \left\{ c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k} : \begin{array}{c} 1 \le e_1 \le \ell_1 \\ \vdots \\ 1 \le e_k \le \ell_k \end{array} \right\}$$

Prop Se $\sigma = c_1 \cdots c_k$ di lunghezze tutte diverse, $\operatorname{Centr}_{S_n}(\sigma) = \{ c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k} \mid 1 \le e_i \le \ell_i \}$

$$c_1^{e_1} \cdots c_k^{e_k} = c_1^{f_1} \cdots c_k^{f_k}$$

$$\underbrace{c_1^{e_1-f_1}}_{id} \cdots \underbrace{c_k^{e_k-f_k}}_{id} = id$$

$\Rightarrow e_1 = f_1, \ldots, e_k = f_k$

(✱) in tal caso,

$$\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) = \{ \text{prodotti di cicli che stanno nella decomp. di } \sigma \},$$

e quindi (siccome per ipotesi ognuno di questi cicli è una permutaz. pari) ho che

$$\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$$

$$\mathrm{Centr}_{S_n}(\sigma) = \mathrm{Centr}_{A_n}(\sigma)$$

e quindi la classe di coniugio di σ in S_n si spezza in 2 classi di coniugio in A_n.

⚠ $\sigma = (1,2,3)(4,5)(6)(7)(8)(9)(10)$

ha centralizz $\simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_5$

Il nostro primo gruppo semplice non abeliano

Def G gruppo si dice SEMPLICE se $H \triangleleft G$ $\Rightarrow H = G$ o $H = \{e\}$

Esempi $\cdot\ G = \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$ $\forall p$ primo

$\cdot\ A_5$ $|A_5| = 60$

Oss chiave Sottogp normale = unione di classi di coniugio

$H \triangleleft G$, $\sigma \in H$ $\forall g \in G$, $g\sigma g^{-1} \in \underbrace{gHg^{-1}}_{= H}$

Classi di coniugio in A_5:

* $\{e\} \rightsquigarrow 1$
* $\{3-\text{cicli}\} \rightsquigarrow 20$
* $\{\text{coppie di trasp}\} \rightsquigarrow 15$
* $\{\text{classe di } (1,2,3,4,5)\} \rightsquigarrow 12$
* $\{\text{classe di } (2,1,3,4,5)\} \rightsquigarrow 12$

Può A_5 contenere un sottogp. normale non banale?

$H \supseteq$ classe di coniugio $\Rightarrow |H| \geq 13$

$|H| \mid |A_5| = 60$

$|H|$ può essere $\cancel{15}$, 20, 30, $\cancel{60}$

15, 20, 30 non si scrivono come somme di cardinalità di classi di coniugio! (Se includo 1)

$\Rightarrow A_5$ è semplice

A_n semplice $\forall n \geq 5$

Induzione. Definisco $G_i = \{\sigma \in A_{n+1} \mid \sigma(i) = i\}$

$G_i \simeq A_n$

Sia $H \triangleleft A_n$; allora $H \cap G_i \triangleleft G_i$

Ma G_i è semplice $\Rightarrow H \cap G_i \begin{cases} G_i \\ \{e\} \end{cases}$

Inoltre i G_i sono tutti coniugati fra loro:

$(1\,3)(2\,4)\, G_1\, (1\,3)(2\,4) = G_3$ (verificare)

$$H \cap G_1 \begin{cases} G_1 \Rightarrow H \supseteq G_1, \dots, G_{n+1} \Rightarrow H = A_{n+1} \\ \{e\} \Rightarrow H \cap G_i = \{e\} \quad \forall i \quad (\text{caso } 2) \end{cases}$$

$$\sigma \underbrace{(H \cap G_1)}_{G_1} \sigma^{-1} = \sigma H \sigma^{-1} \cap \sigma G_1 \sigma^{-1}$$

$$= H \cap \sigma G_1 \sigma^{-1}$$

Nel caso 2 l'Oss chiare è la seguente:

$\sigma, \tau \in H \qquad \sigma(i) = \tau(i) \Rightarrow \sigma = \tau$

Supponiamo che H contenga $(1,2)(3,4,5,6)$

Allora ($H \trianglelefteq A_{n+1}$) H contiene $(1,2)(3,4,6,5)$

Idea: se H contiene almeno una permutaz. σ non banale, contiene $\tau \neq \sigma$ tale che (per qualche i) $\tau(i) = \sigma(i)$, assurdo.

Un ulteriore centralizzatore in S_9

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$$

$$\#(\text{classe coniugio } \sigma) = \frac{\binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{6}{3} \cdot 2 \cdot \binom{3}{3} \cdot 2}{3!}$$

$$= 8 \cdot \frac{9!}{3!\,3!\,3!} \cdot \frac{1}{3!}$$

$$\#\, \mathrm{Centr}_{S_9}(\sigma) = 9! / \#\,\text{orbita} = \frac{(3!)^4}{8} =$$

$$= 3^3 \cdot 3!$$

$$\underbrace{\mathrm{Centr}_{S_9}(\sigma)}_{K} \supsetneq \underbrace{\{(1,2,3)^a (4,5,6)^b (7,8,9)^c\}}_{H \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3}$$

Il $3!$ viene da un S_3 che permuta i tre 3-cicli.

$$\varphi : K \longrightarrow S_3$$
$$\tau \longmapsto \text{la permutaz dei 3 elementi}$$
$$\underset{A}{(1,2,3)}\ ;\ \underset{B}{(4,5,6)}\ ;\ \underset{C}{(7,8,9)}$$

$$\tau = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \longmapsto (A\ B)(C)$$

$$\tau\ \overset{A}{(1,2,3)}\overset{B}{(4,5,6)}\overset{C}{(7,8,9)}\ \tau^{-1}$$
$$\shortparallel$$
$$(\tau(1),\tau(2),\tau(3))\,(\tau(4),\tau(5),\tau(6))\,(\tau(7),\tau(8),\tau(9))$$
$$\shortparallel$$
$$\underset{B}{(4,5,6)}\ \underset{A}{(1,2,3)}\ \underset{C}{(7,8,9)}.$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = H \lhd \operatorname{Centr}_{S_9}(\sigma)$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & S_3 \\ & K/H \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$|K/H| = \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} = 3!$$

$\Longrightarrow K/H \simeq S_3$, perché $\overline{\varphi}$ è iniettivo + surgettivo

$\boxed{\text{NO}}$ $\quad K \simeq H \times S_3$

$\boxed{\text{SÌ (in questo caso)}}$ $K \simeq H \rtimes S_3$