APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI SYLOW

Note Title 10/31/2018

Teorema di Poincaré

G gruppo (finito), $H < G$ di indice n.

Esiste $N \triangleleft G$ t.c.

- $N \subseteq H$
- $n \mid [G:N] \mid n!$

Cor Se G di ordine m contiene un s-gp H di indice $n \neq 1$ e $n! < m$, allora G non è semplice

Dim. Considero l'azione (molt a sx) di G su G/H. $|G/H| = n$

$\rightsquigarrow$ ottengo omomorf $\varphi : G \longrightarrow S_n$

il cui nucleo è $\subseteq H$

[Infatti: se $\varphi(g) = id$, allora molt a sx per g fissa tutte le classi laterali; in particolare $g \cdot H = H$, quindi $g \in H$]

Sia $N = \ker \varphi$. $N \triangleleft G$ perché nucleo,

e $G/N \simeq$ sottogp di S_n

$\Rightarrow \left| G/N \right| \Big| \, n! \Rightarrow [G:N] \mid n!$

$$[G:N] = \underbrace{[G:H]}_{n} [H:N]$$

$\square$

Gruppi semplici di cardinalità ≤ 100

Esclusi: p primo

$p \cdot q$ $\quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ o viceversa

$2d$ $\quad$ sottogp. indice 2

p^k $\quad$ sottogp normali di ogni ordine

Idea 1: a volte c'è un p-Sylow normale "ovvio"

$|G| = 20 = 4 \cdot 5$. Allora $n_5 = 1$ perché

$n_5 \mid 20$ e $n_5 \equiv 1 \quad (5)$

NOTAZIONE $n_p = \#$ dei p-Sylow

Idea 2: un p-Sylow permette di usare Poincaré

$$|G| = 96 = 2^5 \cdot 3$$

Un 2-Sylow P_2 ha indice 3 $\longrightarrow$ per Poincaré

c'è un sgp normale $\neq G$ di indice al più 6

Idea 3: a volte non c'è spazio

$$|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$$

$n_2 = 1$ o 7 $\qquad$ $n_7 = 1$ o 8

Se $n_7 = 8$ allora ho almeno

$$8 \cdot (7-1) = 48$$

elementi di ordine 7

Restano $56 - 48 - 1 = 7$ elementi di ordine $\neq 1, 7$

Ma un 2-Sylow P_2 è costituito da id e 7 elementi

di ordine $\neq 1, 7$

Quindi $P_2 = \{e\} \cup \left(G \setminus \bigcup_{P_7 \text{ 7-Sylow}} P_7 \right)$

e quindi che P_2 e' normale, perché il coniugio preserva l'ordine degli elementi e

$$P_2 = \{ g \in G \mid \text{ord}(g) \neq 7 \}$$

Idea 4: costruire azioni

$|G| = 80$ e $|G| = 72$

$|G| = 80$: un 2-Sylow P_2 ha indice 5

Per Poincaré c'e' un sottogp normale N di indice $5 \mid [G:N] \mid 5! = 120$

$$[G:N] \mid 80$$

$$\Rightarrow [G:N] \mid (80, 120) = 40$$

$$\Rightarrow N \trianglelefteq G, \quad N \neq \{e\}, \quad N \neq G$$

Se $|G| = 72$: $\quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$

$$n_3 = 1 \text{ o } 4$$

- G agisce per coniugio su $\underbrace{\{ P < G, \ |P| = 9 \}}_{\text{possiamo supporre siano 4}}$

- L'azione è transitiva
- $G \xrightarrow{\Phi} S_4$
- $\ker \Phi \neq G$
- $\ker \Phi \triangleleft G$: se $\ker \Phi = \{e\}$ avrei

  immerso G in S_4 assurdo

  $|G| = 72$ $\quad |S_4| = 24$

A_5 è l'unico gruppo semplice di ord $= 60$

$n_2 = \cancel{1}, \cancel{3}, 5, 15$

Se $n_2 = 3$: considero $G \circlearrowright \{2\text{-Sylow}\}$

$\rightsquigarrow$ $G \xrightarrow{\Phi} S_3$ omomorfismo non banale

$\Rightarrow$ $\ker \Phi \triangleleft G$, $\ker \Phi \neq \{e\}, G$

Se $n_2 = 5$: stesso ragionamento dà

$$G \xrightarrow{\Phi} S_5$$

$\ker \Phi \neq G$ ma può essere $\{e\}$; siccome G è semplice, $\ker \Phi = \{e\}$

Quindi G e' isomorfo ad un sottogruppo di S_5.

Considero $\underbrace{\Phi(G) \cap A_5}_{\parallel} \triangleleft \Phi(G)$

$$\ker \operatorname{sgn}\big|_{\Phi(G)} : \Phi(G) \xrightarrow{s} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Se $\Phi(G) \not\subseteq A_5$, allora $\dfrac{\Phi(G)}{\ker s} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ker s \triangleleft \Phi(G)$ ed e' non banale

Questo e' assurdo, quindi $\Phi(G) \subseteq A_5$ e

per motivi di cardinalita' $A_5 = \Phi(G) \simeq G$

Se $n_2 = 15$: innanzitutto $n_5 = 6$

$\rightsquigarrow \#\{\text{elementi di ord } 5\} = 6 \cdot (5-1) = 24$

Se i 2-Sylow si intersecassero tutti banalmente

avrei $\underbrace{15 \cdot (4-1)}_{\text{nei 2-Sylow}} + \underbrace{24}_{\text{ord } 5} + 1 = 70 > 60$

elementi in G, assurdo.

Siano P e Q due 2-Sylow con $|P \cap Q| = 2$.

Sia $H = P \cap Q$. $N_G(H) \supseteq P, Q$

$H < P$ di indice 2

(o P e' abeliano)

$4 \mid \# N_G(H) \mid 60$

$\# N_G(H) \neq 4$ (perché contiene SIA P SIA Q)

$\Rightarrow \# N_G(H) \geq 12$

$\# N_G(H) = \underbrace{12}, \underbrace{20}_{\text{Poincaré } (60 > 3!)}, \underbrace{60}_{H \triangleleft G}$

12: l'azione di G su $G / N_G(H)$ da' un omomorfismo $G \longrightarrow S_5$

$\rightsquigarrow$ ripeto la dim. di prima

(Formalmente la dim si conclude in un assurdo:

$G \hookrightarrow S_5 \rightsquigarrow G \simeq A_5 \rightsquigarrow n_2(G) = 5$,

mentre avevamo supposto $n_2 = 15$)

$|G| = 112$ non è semplice

$112 = 7 \cdot 16 = 2^4 \cdot 7$ Per assurdo G sia semplice

$n_2 = 1$ o 7 $n_7 = 1$ o 8

Se $n_2 = 1$: OK

Se $n_2 = 7$: Sia $\Phi : G \longrightarrow S_7$ l'omomorfismo

corrispondente all'azione di G sui 2-Sylow

Siccome G è semplice, Φ è iniettivo

$$\# S_7 = 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 7 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 5$$

Ma $\operatorname{Im} \Phi \subseteq A_7$ perché $\Phi(G) \simeq G$ è semplice

$\Rightarrow$ $|\operatorname{Im} \Phi| = 112 \mid \# A_7 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5$, assurdo.

Classificare i gruppi di ordine $3 \cdot 5 \cdot 17$

$n_3 = 1$ o 85

$n_5 = 1$ o 51

$n_{17} = 1$

Sia $H \triangleleft G$ il 17-Sylow.

Modo 1: considero G/H. $|G/H| = 3 \cdot 5$

$\Longrightarrow G/H \simeq \mathbb{Z}/_{15}\mathbb{Z}$

Se gH e' un generatore di G/H, allora

$15 \mid ord(g) \Rightarrow$ un' opportuna potenza di g ha

ordine 15; sia y questa potenza.

$G \triangleright H$ e $G > \langle y \rangle = K$

$$\Rightarrow \quad G \simeq H \rtimes_{\psi} K \qquad\qquad G \simeq \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{banale}}}{H \times K}$$

con $\underset{\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}}{\psi : K} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^{\times} \simeq \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}}}{\mathrm{Aut}(H)}$

$$G \simeq \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\cdot 5\cdot 17\,\mathbb{Z}$$

Modo 2: Tentare di dim $H < Z(G)$

In generale: se $H \triangleleft G$ posso considerare

$$\psi_H : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$$
$$g \longmapsto \text{coniugio per } g$$

il cui nucleo e' $\{ g \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in H \}$

$$= Z_G(H)$$

Nel nostro caso: $\# G = 3 \cdot 5 \cdot 17$ mentre

$\# \mathrm{Aut}(H) = 16$, quindi φ_H è banale

$$G = \ker \varphi_H = Z_G(H)$$

Lemma Se $G/Z(G)$ è ciclico, G è abeliano (e quindi $G/Z(G) = \{e\}$)

$$\left| G/Z(G) \right| \in \{1, 3, 5, 15\}$$

$\Rightarrow$ $G/Z(G)$ ciclico $\Rightarrow$ G abeliano

$$\xrightarrow[\text{classif}]{\text{teo}} \quad G \simeq G_3 \times G_5 \times G_{17}$$

$$\simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$$

Classificare i gruppi abeliani di ord $16 \cdot 9$

$$G \simeq G_2 \times G_3 \quad \text{con} \quad |G_2| = 16$$

$$|G_3| = 9$$

G_3 : ci sono 2 possibilità, $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

G_2 : le possibilità sono $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

In totale ci sono 10 gp abeliani di ordine 144

Automorfismi di $D_n \times D_n$

$$Aut(D_n) = \left\{ f : \begin{array}{l} D_n \longrightarrow D_n \\ r \longmapsto r^i \\ s \longmapsto s \cdot r^j \end{array} \;\middle|\; (i,n) = 1 \right\}$$

$\boxed{\text{CASO DI } n \text{ DISPARI}}$ $\quad G = D_n \times D_n$

$$Z_G((e, r^i)) = D_n \times R_n$$

$$Z_G((e, sr^j)) = D_n \times \{e, sr^j\}$$

$$Z_G((r^i, sr^j)) = R_n \times \{e, sr^j\}$$

Gli unici elementi con centralizzatore di indice 2 in G sono (e, r^i) e (r^i, e)

$$(r, e) \nearrow (r^i, e) \qquad (i,n) = 1$$

$$(r, e) \searrow (e, r^i) \qquad (i,n) = 1$$

Classifichiamo gli automorfismi $\alpha : G \longrightarrow G$ t.c.

$$\alpha((r,e)) = (r^i, e)$$

$\alpha((e,r)) = (e, r^j)$

[Se $\alpha((e,r)) = (r^j, e)$ allora

$\alpha((r,e))$ e $\alpha((e,r))$ generano lo

stesso sgruppo, ma questo non e' vero per

(e,r) e (r,e)]

Chi e' $\alpha((s,e))$? $\quad \alpha(s,e) = (x_1, y_1)$

(x,y) deve commutare con $\alpha((e,r)) = (e, r^j)$

quindi $y = id$ o una rotazione.

D'altro canto $\alpha((s,e)(r,e)(s,e)) = \alpha((r^{-1}, e))$

dice che x_1 $\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\parallel}{(r^{-i}, e)}$

$(x_1, y_1)(r^i, e)(x_1, y_1) = (r^{-i}, e)$

$\Rightarrow x_1 r^i x_1 = r^{-i} \Rightarrow x_1$ e' simmetria

Stesso ragionamento $\Rightarrow \alpha((e,s)) = (x_2, y_2)$

ha y_2 = simmetria e x_2 = id o rotaz.

$$(s,e)\cdot(e,s) = (e,s)\cdot(s,e)$$

$$\Big\downarrow \text{ applico } \alpha$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)\cdot(x_1, y_1)$$

simmetria

id o rotaz; ma non può essere rotaz, perché non commuterebbe con la simmetria

$$\Rightarrow \quad (x_1, y_1) = (sr^k, e)$$

$$(x_2, y_2) = (e, sr^\ell)$$

Inoltre esiste $\tau : G \times G \longrightarrow G \times G$

$$(a,b) \longmapsto (b,a)$$

convincetevi

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Aut}(G) \simeq \big(\mathrm{Aut}(D_n) \times \mathrm{Aut}(D_n)\big) \rtimes \langle \tau \rangle$$

$\boxed{\text{CASO } m \text{ PARI}}$

Dipende da $m \bmod 4$

$\boxed{\text{Se } m \equiv 2 \ (4)}$ $\quad m = 2k$ con k dispari

$$D_m \simeq D_k \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Aut}(D_m \times D_m) = \mathrm{Aut}\Big(D_k \times D_k \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big)$$

$$\mathrm{Aut}\left(\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2\right) \simeq S_3$$

a lezione l'ho cambiato in D_k, ma ricontrollando vedo che è corretto D_m

$$\#\mathrm{Aut}(D_m \times D_m) = \#\mathrm{Aut}(D_m)^2 \cdot 48$$

Oss: l'elemento (r^2, r^k) ha ordine $2k$

e centralizzatore "giusto"

$\boxed{\text{Se } m \equiv 0 \ (4)}$ Guardate la soluz. online!