ALGEBRA 1 - 16 NOV 2018

Note Title 11/16/2018

Corrispondenza biunivoca fra gli ideali

Sia $f: A \to B$ un omomorfismo SURGETTIVO di anelli, $K = \ker f$.
Allora f induce una corrispondenza biunivoca fra:
- ideali I di A che contengono K
- ideali J di B.

$\left(\begin{array}{l} I \to f(I) \\ J \to f^{-1}(J) \end{array}\right)$.

Inoltre se $I \leftrightarrow J$

I primo $\Leftrightarrow$ J è primo

I massimale $\Leftrightarrow$ J è massimale

Oss. 1 I ideale di A $\Rightarrow$ $f(I)$ ideale di B

J ideale di B $\Rightarrow$ $f^{-1}(J)$ ideale di A

Dim. Basta verificare la proprietà di assorbimento

$b \in B \quad y \in f(I) \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad by \in f(I)$

surg.: $\quad b = f(a) \qquad y = f(x) \qquad ax \in I$

$by = f(a)f(x) = f(ax) \in f(I)$

$x \in I \Rightarrow ax \in I$

$f^{-1}(J)$ ideale $\forall f$ (anche non surgettivo)

$a \in A \quad x \in f^{-1}(J) \quad$ (cioè $f(x) \in J$)

$\overset{?}{\Rightarrow} \quad ax \in f^{-1}(J)$, cioè $f(ax) \in J$

$f(ax) \overset{\checkmark}{=} f(a)f(x) \in J$.

Oss. 2 È ovvio che $f^{-1}(J) \supseteq K$. $\quad (f^{-1}(J) \supseteq f^{-1}(0))$

$\rightsquigarrow$ corr. biunivoca fra ideali

P primo $\Leftrightarrow f(P)$ primo

$\Rightarrow$ Supp. $x'y' \in f(P)$

surg. $x' = f(x)$ $y' = f(y)$

$f(xy) = f(x)f(y) \in f(P)$

$xy \in P$ (corr. biunivoca)

$\Rightarrow x \in P$ o $y \in P$

$f(x) \in f(P)$ o $f(y) \in f(P)$.

$\Leftarrow$ supp. $xy \in P \Rightarrow f(x)f(y) \in f(P)$

$\Rightarrow f(x) \in f(P)$ o $f(y) \in f(P)$ (corr. biuniv.)

$x \in P$ o $y \in P$.

M massimale $\Leftrightarrow f(M)$ massimale

$M \subseteq I \subseteq A \Leftrightarrow f(M) \subseteq f(I) \subseteq \underline{f(A) = B}$

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ inclusione.

$I = (m)$ $f(I) = I$ non è un ideale

$m \neq 0$

$I = (p) \Rightarrow f(I)$ non è ideale

(non primo, non massimale)

<u>Anelli di frazioni</u>

(Estensione della costruzione dei numeri razionali:

classi di equivalenza di coppie : $5/3 = 10/6$.

<u>Ipotesi</u>: A dominio d'integrità (comm. con 1)

Def. Un sottoinsieme S di A si dice moltiplicativamente chiuso se:

- $0 \notin S$
- $1 \in S$
- $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

Esempi $A = \mathbb{Z}$ $\quad S = \{2^n \mid n \geq 0\}$

$S = \{k^n \mid n \geq 0\}$ con $k \neq 0$

$S = \{\text{dispari}\}$

$S = \mathbb{Z} \setminus (p)$ $\qquad x \notin (p)\ y \notin (p) \Rightarrow xy \notin (p)$

$S = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Nell'insieme $S \times A$ introduco una relazione di equivalenza

$$(s, a) \sim (t, b) \Leftrightarrow sb = ta$$

Def Dati S, A come sopra, definisco l'anello $S^{-1}A$ come l'insieme delle coppie $(s, a) \in S \times A$ modulo la relazione di equivalenza scritta sopra; (Notazione: $\frac{a}{s}$) e in cui le operazioni sono:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

QUALCHE VERIFICA: rel. di equivalenza

proprietà transitiva

num $\in A$ den $\in S$

$$\frac{x}{s} \sim \frac{y}{t} \quad , \quad \frac{y}{t} \sim \frac{z}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{s} \sim \frac{z}{u}$$

$$tx = sy \qquad uy = tz \qquad \overset{?}{\Rightarrow} \qquad sz = ux$$

$$\underbrace{tx}z = syz \qquad uxy = \underbrace{tx}z \qquad syz = uxy$$

$$y(sz - ux) = 0$$

se $y \neq 0$ $\quad sz - ux = 0$ ok

se $y = 0$ allora

$$tx = s \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad \frac{0}{s} \sim \frac{0}{u}$$

$$uy = tz = 0 \Rightarrow z = 0$$

Buona def $+$

$$\frac{x}{s} \sim \frac{x'}{s'} \qquad \frac{y}{t} \sim \frac{y'}{t'} \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \frac{x}{s} + \frac{y}{t} \sim \frac{x'}{s'} + \frac{y'}{t'}$$

cioè

$$\frac{xt + ys}{st} = \frac{x't' + y's'}{s't'}$$

$s'x = xs'$

$t'y = ty'$

$$s't'(xt + ys) = st(x't' + y's')$$

$$\underbrace{s't'xt} + \underbrace{s't'ys} = \underbrace{stx't'} + \underbrace{sty's'}$$

Elementi neutri: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$.

Prop. Si ha un omomorfismo iniettivo $f: A \to S^{-1}A$ dato da

$$f(x) = \frac{x}{1}.$$

Dim

$$f(x+y) = \frac{x+y}{1} = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = \frac{xy}{1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = f(x) f(y)$$

$$\ker f = \{x \in A \mid x/1 = 0/1\} \qquad x = 0$$

Es. $A = \mathbb{Z}$ $\qquad S = \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{m}{10^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

sviluppo decimale finito.

$A = \mathbb{Z}$ $\qquad S = \mathbb{Z} \setminus ((2) \cup (5))$

$$S^{-1}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{m}{n} \mid 2 \nmid n \quad 5 \nmid n \right\}$$

numeri razionali puramente periodici in base 10.

Ideali di $S^{-1}A$.

Esempio $\quad I$ ideale di A

$$S^{-1}I = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in I, \ s \in S \right\}$$

$$\frac{x}{s} + \frac{x'}{s'} = \frac{xs' + x's}{ss'} \qquad xs' + x's \in I$$

Problema: È vero che se I è un ideale PROPRIO di A, allora anche $S^{-1}I$ è un ideale proprio di $S^{-1}A$?

In generale NO.

- Se $I \cap S \neq \emptyset$ $\qquad s \in I \cap S$

  $\frac{1}{1} = \frac{s}{s} \in I \cap S$ $\qquad$ non è ideale proprio.

- Se $I \cap S = \emptyset$ allora $S^{-1}I$ è ideale proprio.

Supponiamo, per assurdo, $S^{-1}I = S^{-1}A$

Allora $\frac{1}{1} \in S^{-1}I$ $\qquad \frac{1}{1} = \frac{x}{s} \quad x \in I, s \in S$

$$\underset{I}{\underset{\cap}{x}} = \underset{S}{\underset{\cap}{s}} \qquad \text{IMPOSSIBILE.}$$

<u>Prop.</u> Ogni ideale di $S^{-1}A$ è della forma $S^{-1}I$ per un qualche ideale I di A.

<u>Dim.</u> $J \subseteq S^{-1}A$ ideale.

Sia I l'insieme dei numeratori degli elementi di J.

$$I = \{x \in A \mid \exists s \in S \quad \frac{x}{s} \in J\}.$$

- I è un ideale: (verifico solo la proprietà della somma)

$$\frac{x}{s} \in J \Rightarrow \frac{s}{1} \cdot \frac{x}{s} = \frac{x}{1} \in J$$

$$\frac{y}{t} \in J \Rightarrow \frac{y}{1} \in J$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1} \in J \qquad x+y \in I$$

- Inoltre $S^{-1}I = J$ $\qquad \supseteq$ ovvio per definizione

$\subseteq$: Sia $\frac{x}{s} \in S^{-1}I$

Allora esiste $t \in S$ tale che $\frac{x}{t} \in J$

$$\frac{x}{s} = \frac{t}{s} \cdot \frac{x}{t} \in J.$$

__Esempio__ (Non c'è corrispondenza biunivoca).

$A=\mathbb{Z}$ $\quad S=\{\text{dispari}\}$

In $S^{-1}A$ $\qquad (2)=(6)$.

__Oss__ Invece, se mi limito ad ideali primi P di A con $P\cap S=\emptyset$, la corrispondenza

$$P \leftrightarrow S^{-1}P$$

è biunivoca.

__Dim__ P primo $\Rightarrow S^{-1}P$ primo

$$\frac{x}{s}\ \frac{y}{t} \in S^{-1}P \qquad \frac{xy}{st}\in S^{-1}P$$

$$\frac{xy}{st} = \frac{z}{u} \qquad z\in P \quad u\in S$$

$$uxy = stz \in P$$

$u\notin P \qquad xy\in P \Rightarrow x\in P$ o $y\in P$.

$\Leftarrow$ esercizio.

Corr. biunivoca $\qquad P\subseteq Q \iff S^{-1}P\subseteq S^{-1}Q$

$\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow \qquad x\in P \qquad \frac{x}{1}\in S^{-1}P$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{s} \qquad y\in Q \quad s\in S$$

$$sx = y$$

$s\in S \quad s\notin Q \qquad \Rightarrow x\in Q$.

__Oss__ $\quad A$ qualsiasi $\quad S=A\setminus P$

Allora tutti gli elementi di $S^{-1}A \setminus S^{-1}P$
sono invertibili.

$$\frac{x}{s} \qquad \begin{matrix} x \notin P \\ s \in S \end{matrix} \qquad \iff x \in S = A - P$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{s}{x} = \frac{1}{1}$$

$\Rightarrow$ $S^{-1}P$ È L'UNICO IDEALE MASSIMALE DI $S^{-1}A$

(Oss. se $S = A - \{0\}$ $S^{-1}A$ è un campo, il campo dei quozienti)

\# radici di un pol $\leq$ grado

NON DOMINIO

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $\qquad 3x = 0$
ha le radici $0, 2, 4$.