COMPITO DI ALGEBRA 1
18 giugno 2019

1. (a) Sia G un gruppo di ordine $8 \cdot 11 \cdot 19$. Dimostrare che G contiene un sottogruppo normale di ordine $11 \cdot 19$.

(b) Determinare il mimimo intero n per cui $\mathcal{S}_n$ contiene un sottogruppo di ordine $8 \cdot 11 \cdot 19$.

2. Consideriamo il gruppo $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$, ovvero il gruppo delle matrici 2×2 con coefficienti in $\mathbb{F}_5$ e determinante diverso da 0. Sia T il sottogruppo delle matrici triangolari superiori.

(a) Dimostrare che $T \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

(b) Determinare il numero di 5-Sylow di G.

3. Sia A un anello commutativo con identità, e sia $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ l'insieme dei suoi ideali primi. Supponiamo che per ogni $i \neq j$ si abbia $P_i \cap P_j = \{0\}$. Dimostrare che:

(a) A è un anello locale oppure è isomorfo ad un prodotto diretto di campi;

(b) $\mathcal{P}$ contiene al massimo due elementi.

4. Sia $p(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12}$ e sia K il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

(a) Determinare il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$.

(b) Per ognuno dei campi L con $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K$ e $[L : \mathbb{Q}] = 2$, descrivere L nella forma $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ con d intero.

(c) Quanti sono i campi F con $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq K \cap \mathbb{R}$?