MISCELLANEA

- Formule chiuse per le successioni per ricorrenza lineari

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} & (\mathrm{I}) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 5 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Cerco una soluzione di (I) nella forma $a_n = \lambda^n$

① se ho una succ. a_n che rispetta (I), allora $c \cdot a_n$ rispetta (I)

② se ho due succ. a_n e b_n che risp. (I), allora $a_n + b_n$ rispetta (I)

Se voglio $a_n = \lambda^n$ deve valere

$$\lambda^{n+1} = 5\lambda^n - 6\lambda^{n-1} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\xleftrightarrow{:\lambda^{n-1}} \quad \lambda^2 = 5\lambda - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Ora sappiamo che $a_n = 2^n$ e $b_n = 3^n$ sono soluzioni di (I)

Cerco ora una soluzione di (I) + (II)

nella forma $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$

Siccome questa succ. rispetta (I), basta imporre $a_0 = 2$ e $a_1 = 5$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

In definitiva: $a_n = 2^n + 3^n$

IN GENERALE $\quad a_{n+1} = h\, a_n + K\, a_{n-1} \quad (I)$

① cerco soluzioni del tipo $a_n = \lambda^n$; esse sono quelle con λ soluzione di $\lambda^2 = h\lambda + K$

② $\boxed{\text{SE}}$ le due soluzioni di questa equazione, λ_1 e λ_2, sono distinte, allora ogni succ. per ric. che rispetti (I) e' del tipo $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$

③ Per trovare c_1, c_2 si risolve il sistema

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{cases}$$

E se $\lambda_1 = \lambda_2$?

In tal caso, anche $a_n = n \cdot \lambda^n$ è soluzione, ed ogni soluzione di (I) è del tipo

$$a_n = (c_1 + c_2 n) \cdot \lambda^n$$

Ex
$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1}) \end{cases}$$

$$\lambda^2 = 4\lambda - 4 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$
$$\iff (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$a_n = n \cdot 2^n \qquad a_0 = 0 \qquad a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} \stackrel{?}{=} 4\left(n \cdot 2^n - (n-1) \cdot 2^{n-1}\right)$$

$$\iff 4(n+1) \stackrel{?}{=} 4(\underbrace{2n - (n-1)}_{n+1}) \quad \boxed{\text{OK}}$$

Con termine costante?

$$a_{n+1} = 3a_n + 2, \qquad a_0 = 2$$

Introduciamo $b_n = a_n + h$, che rispetti una relaz. per ricorr. più semplice

$$b_{n+1} = a_{n+1} + h = (3a_n + 2) + h$$
$$= 3(b_n - h) + 2 + h$$
$$= 3b_n + 2 - 2h$$

Prendendo $h = 1$ troviamo che $\begin{cases} b_{n+1} = 3b_n \\ b_0 = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad b_n = 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 3^{n+1} - h = 3^{n+1} - 1$$

Esercizio

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = a \\ x_{n+1} = 5x_n + 3x_{n-1} \end{cases} \qquad 3 \nmid a$$

<u>Tesi</u>: per ogni $n \geq 0$ si ha $(x_n, x_{n+1}) = 1$

Proviamo per induzione. Per $n = 0$ e' ovvio.

$$(x_n, x_{n+1}) = (x_n, 5x_n + 3x_{n-1})$$
$$= (x_n, 5x_n + 3x_{n-1} - 5x_n)$$
$$= (x_n, 3x_{n-1})$$

Sia p un primo qui, ovvero un primo che divide sia x_n che $3x_{n-1} \Rightarrow p = 3$

Infatti: $p \mid 3x_{n-1}$ $\begin{cases} p \mid 3 \implies p = 3 \\ \begin{cases} p \mid x_{n-1} \\ p \mid x_n \end{cases} \text{ NO per ipotesi induttiva} \end{cases}$

Per concludere occorre e basta dim. che
$\forall n \quad 3 \nmid x_n$

Riproviamo: altra induzione. $3 \nmid x_0$, OK

Passo di induzione: voglio $3 \nmid x_{n+1}$

$$x_{n+1} = 5x_n + 3x_{n-1} \equiv 2x_n \not\equiv 0 \pmod 3$$

per hp. indutt., $x_n \not\equiv 0 \ (3)$

$\not\equiv 0 \ (3)$

$$3 \mid x_{n+1} = 5x_n + 3x_{n-1} \iff 3 \mid 5x_n$$

$$\iff 3 \mid x_n$$ NO per hp. induttiva

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO MODULO m

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 4b}{4}$$

$$x + a/2 = \pm \sqrt{\frac{a^2-4b}{4}}$$

⚠ modulo m le radici quadrate possono essere tante!

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Tutto ciò funziona anche modulo m, purché

- m dispari (in modo che $\frac{a}{2}$ abbia senso modulo m: $2^{-1}a$)
- $a^2 - 4b$ sia un quadrato modulo m (Δ " " " " ")
- si tenga conto che ci possono essere tante $\sqrt{\Delta}$

Esempio $x^2 - x + 43 \equiv 0 \pmod{55}$

$$\begin{cases} x^2 - x + 43 \equiv 0 \ (5) \\ x^2 - x + 43 \equiv 0 \ (11) \end{cases}$$

$$x_{1,2} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 43}}{2} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2} \quad \text{mod } 5$$

$$\equiv \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2} \equiv \begin{cases} 3/2 \equiv 9 \equiv 4 & \text{mod } 5 \\ -1/2 \equiv 2 & \text{mod } 5 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} \equiv 2^{-1}\cdot 3 \equiv 3 \cdot 3$$

$$x_{1,2} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 43}}{2} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \equiv \frac{1 \pm 4}{2} \quad \text{mod } 11$$

$$\equiv \begin{cases} 5/2 \equiv 30 \equiv 8 & \text{mod } 11 \\ -3/2 \equiv -18 \equiv 4 & \text{mod } 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \ (5) \\ x \equiv 8 \ (11) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \ (5) \\ x \equiv 8 \ (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \ (5) \\ x \equiv 4 \ (11) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 2 \ (5) \\ x \equiv 4 \ (11) \end{cases}$$

Qualcosa con $\varphi(n)$

- Determinare gli $n \le 120$ t.c. $(n, \varphi(n)) = 3$

Scrivo $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)\, p_1^{e_1 - 1} \cdots (p_k - 1)\, p_k^{e_k - 1}$$

Se $e_i \geq 2 \implies p_i \mid n$ e $p_i \mid \varphi(n) \implies p_i \mid 3$

Ovvero: l'unico primo che può comparire con esponente ≥ 2 è 3: tutti gli altri compaiono con esponente 1.

Inoltre: $* \; 3 \mid n \implies$ esponente di $3 \geq 1$

$* \; 9 \nmid (n, \varphi(n)) \implies$ " " " ≤ 2

$n \geq 3 \implies \varphi(n)$ pari, ma $(n, \varphi(n))$ è dispari

$\implies n$ è dispari

Due casi: (i) $n = 3m$ con $(m, 6) = 1$

(ii) $n = 9m$ con $(m, 6) = 1$

Cominciamo da (ii):

$$3 = (n, \varphi(n)) = (9m, \varphi(9)\varphi(m)) = (9m, 6\varphi(m))$$

$$= 3\,(3m,\ \varphi(m))$$

dove $m \leq \frac{120}{9} = \frac{40}{3} < 14$ rispetta

$$(3m,\ \varphi(m)) = 1$$

tutte le volte che $p \mid m$, $(p-1) \mid \varphi(m)$, quindi $(3, p-1) = 1$. Ovvero: i fattori primi di m sono $\equiv 2 \mod 3$

Quindi gli unici fattori primi possibili per m sono $5,\ 11$ $\Rightarrow$ $m=5$, $m=11$, $m=1$ sono le uniche possibilità

(i) $n = 3m$

$m \leq 40$

$$(3m,\ 2\cdot\varphi(m)) = 3$$
$$\parallel$$
$$(3m,\ \varphi(m))$$

In particolare $3 \mid \varphi(m)$; se scrivo

$$m = q_1 q_2 \cdots q_k$$

almeno un q_i dev'essere $\equiv 1\ (3)$

Uno dei $q_i \in \{7, 13, 19, 31, 37\}$

Se m ha almeno due fattori primi,

$$m = q_1 q_2,$$

l'unica possibilità è $m = 35$ (tutti gli altri prodotti di due primi sono > 40)

Altrimenti m è primo, $m \in \{7, 13, 19, 31, 37\}$

Esercizio Determinare il n° di coppie (x,y) in $\mathbb{Z}/_{100}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{100}\mathbb{Z}$ t.c. $xy \equiv 0 \ (100)$

② la congruenza e' equiv. a $\begin{cases} xy \equiv 0 \ (4) \\ xy \equiv 0 \ (25) \end{cases}$

① Per casi secondo i "fattori primi 2 e 5 di x"

Sia $d = (x, 100)$. Fissato d, ci sono:

- $x = dK$ con $(d,k) = 1$ e $K \leq \frac{100}{d}$

$d = 1 \rightsquigarrow$ scelte per $x = \varphi(100)$

$d = 2 \rightsquigarrow$ scelte per $x = \varphi(50)$

$d \rightsquigarrow$ scelte per $x = \varphi\left(\frac{100}{d}\right)$

- quante scelte per y? d

Infatti: $0 \equiv xy \ (100)$ e $x = kd$ con $(k, 100) = 0$, allora $0 \equiv dy \ (100)$ $\iff 0 \equiv y \left(\bmod \frac{100}{d}\right)$, per cui ci sono d scelte.

Risposta: $\displaystyle\sum_{d \mid 100} d \cdot \varphi\left(\frac{100}{d}\right)$

Com'era l'altro modo? $\quad xy \equiv 0 \ (p^2)$

$x \equiv 0 (p^2)$ y qualunque $\longrightarrow$ p^2 coppie

$x \equiv pk \ (p^2)$ con $(k,p)=1$ $\longrightarrow$ $(p-1)\cdot p$ coppie

$(x, p^2) = 1$ $\longrightarrow$ $\varphi(p^2)\cdot 1 = p^2 - p$ coppie

In totale, $3p^2 - 2p$ coppie di soluzioni

Risposta al problema $= (3\cdot 2^2 - 2\cdot 2)(3\cdot 5^2 - 2\cdot 5)$

$= 8 \cdot 65 = 520$

Determinare la cardinalità di

$$A = \{ f : \{1, \dots, 5\} \to \{1, \dots, 100\} \mid f(i) < f(i+1) \text{ per } i = 1, \dots, 4 \}$$

Una tale f è determinata univocamente dall'insieme $\{ f(1), f(2), \dots, f(5) \}$ tutti distinti

$$\Rightarrow \quad \# A = \binom{100}{5}$$

$$B = \{ f \in A \mid \exists i \text{ con } f(i+1) > f(i) + 1 \}$$
$$= A \setminus \{ f : \{1, \dots, 5\} \to \{1, \dots, 100\} \text{ t.c. } f(i+1) = f(i) + 1 \ \forall i \}$$

$$\# B = \# A - 96$$

una funzione t.c. $f(i+1) = f(i) + 1$ è determinata da $f(1) \in \{1, \dots, 96\}$

$$C = \{ f \in A \mid f(i+1) > f(i) + 1 \ \forall i = 1, 2, 3, 4 \}$$

Se prendo $f \in C$, allora la funzione

$$g(i) = f(i) - i$$

è tale che: * strettamente crescente:

$$f(i+1) - (i+1) > (f(i) + 1) - (i+1) = f(i) - i$$

* ha immagine in

$$\{0, \dots, 95\}$$

* determina f

Quindi C è in $\boxed{\text{bigezione}}$ con

data $g: \{1, \dots, 5\}$ in $\{0, \dots, 95\}$ strett. crescente, $f(i) = g(i) + i$ è un elemento di C

$$\{ g: \{1, \dots, 5\} \longrightarrow \{0, \dots, 95\} \}$$

strett. crescenti, che sono $\binom{96}{5}$