ESERCITAZIONE

Note Title 10/11/2017

MULTINOMIALI

Dato un insieme con n elementi e interi $k_1, \dots, k_r$ $\quad k_1 + \dots + k_r = n$

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdots k_r!}$$

ANAGRAMMI

AAABBC

AAABBC

N° di anagrammi colorati $= 6!$

N° di anagrammi veri (= il colore delle lettere non conta) $\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$

Altra giustificazione: io ho un insieme di 6 caselle $\boxed{A\ C\ B\ A\ A\ B}$ di cui scegliere 3 che riceveranno una "A"

2 —— "B"

1 —— a — "C"

$$\# \text{ modi} = \binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}$$

Dal primo compitino del 2014

Determinare n° sottoinsiemi di $\{1, ..., 100\}$

con tre elementi la cui somma sia $= 100$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

N° di soluzioni con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$: $\binom{99}{2}$

L'insieme di tutte le soluzioni si scrive

come l'unione disgiunta di

$$S_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 = 100 \\ x_1 \neq x_2,\ x_2 \neq x_3,\ x_3 \neq x_1 \end{array} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \text{———} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 = 100 \\ x_1 = x_2 \ \text{ o } \ x_2 = x_3 \\ \text{o } \ x_3 = x_1 \end{array} \right\}$$

Risposta al problema $= \dfrac{|S_3|}{3!}$, perché

ogni sottoinsieme $\{a, b, c\} \subseteq \{1, -, 100\}$ con

$a+b+c = 100$ fornisce 6 soluzioni:

$a+b+c = 100$	$b+c+a = 100$
$a+c+b = 100$	$c+a+b = 100$
$b+a+c = 100$	$c+b+a = 100$

$$\{50, 40, 10\}$$

$$50+40+10=100$$
$$50+10+40=100$$
$$\vdots \text{ altre } 4$$

Siccome $|S_3| = \binom{99}{2} - |S_2|$, ci basta calcolare $|S_2| =$

$$= 3 \left| \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=100 \\ x_1 = x_2 \end{array} \right\} \right|$$

$$(x_2 = x_3 \qquad x_3 = x_1)$$

$$= 3 \left| \left\{ x_3 \in \{1,\dots,100\} \;\middle|\; x_1 = x_2 = \frac{100-x_3}{2} \text{ ha soluz.} \right\} \right|$$

$$= 3 \cdot 49$$

$\hookrightarrow$ n° di interi pari in $\{1, \dots, 99\}$

Contare le terne (x_1, x_2, x_3) t.c. → terne ordinate

$\{x_1, x_2, x_3\}$ → sottoinsiemi (l'ordine non conta)

$1 \le x_i \le 60$

esattamente 2 sono pari

esattamente 1 è divisibile per 3

Due casi

(a) * Quello divisibile per 3 è anche pari

(b) * ———————— è dispari

Nel caso (a)

(*) $\left\{\begin{array}{l} \text{una variabile è div. per 6} \\ \text{———— è pari, ma non div. per 6} \\ \text{———— è dispari e non div. per 3} \end{array}\right.$

Numero di soluzioni nel caso (a)

$$= 6 \times \left| \left\{ \begin{array}{l} \text{terne di interi fra 1 e 60,} \\ \text{non ord. che rispettino (*)} \end{array} \right\} \right|$$

$$= 6 \times 10 \times 20 \times 20$$

Numero di soluzioni nel caso (b)

(b.1) i due pari sono uguali

(b.2) ———————— diversi

(b.1) $3 \times 10 \times 20$

quale delle 3 variabili è multipla di 3? (e dispari)

quanto vale questa var?

il valore comune delle altre 2 variabili (che è pari, non div. per 3)

(b.2) $6 \times 10 \times \binom{20}{2}$

ordini

dispari div. per 3

coppie non ordinate di pari non div. per 3

Divisori

Sia n un intero > 0. Allora il numero di divisori > 0 di n e' dispari $\iff$ n e' un quadrato perfetto

Formula per il numero di divisori

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

dove : i p_i sono primi, tutti diversi fra loro

$$e_i \geq 1$$

Se $m \mid n$, allora $m = p_1^{f_1} \cdots p_k^{f_k}$,

dove $0 \leq f_i \leq e_i$

Numero di divisori > 0 di $n =$

$= n°$ scelte degli f_i

$$= (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1)$$

Esempio N° divisori di $100 = 2^2 \cdot 5^2$

$\llcorner$ $(2+1)(2+1) = 9$

Quando capita che $(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)$ è dispari? Solo se e_1+1 dispari, e_2+1 dispari, ..., e_k+1 dispari

$\iff$ e_i tutti pari, $e_i = 2c_i$

$$\iff \quad n = p_1^{2c_1} \cdot p_2^{2c_2} \cdots p_k^{2c_k}$$
$$= (p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k})^2$$

Equazioni diofantee lineari

$$173x + 132y = 1$$

① Esiste una soluzione intera?

$$173 = 1 \cdot 132 + 41$$
$$132 = 3 \cdot 41 + 9$$
$$41 = 4 \cdot 9 + 5$$
$$9 = 1 \cdot 5 + 4$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

massimo comun divisore $= 1$
$\Rightarrow$ c'è soluz!

② Troviamo la soluzione

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 - 9$$
$$= 2(41 - 4 \cdot 9) - 9 = 2 \cdot 41 - 9 \cdot 9$$
$$= 2 \cdot 41 - 9 \cdot (132 - 3 \cdot 41)$$
$$= 29 \cdot 41 - 9 \cdot 132$$
$$= 29 \cdot (173 - 132) - 9 \cdot 132$$
$$= 29 \cdot 173 - 38 \cdot 132$$

③ Trovare *tutte* le soluzioni

$$ax + by = d$$

con $(a,b) \mid d$

Una soluzione (x_0, y_0) esiste!

$$ax + by = d$$
$$ax_0 + by_0 = d$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Scriviamo $a = (a,b) \cdot a'$

$$b = (a,b) \cdot b'$$

Semplificando un fattore (a,b) troviamo

$$a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0$$

$$\boxed{a'(x - x_0) = -b'(y - y_0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a' \mid b'(y - y_0) \\ \text{e } (a', b') = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a' \mid y - y_0$$

Posso scrivere $y - y_0 = k \cdot a'$

$\square \Rightarrow \cancel{a'} \cdot (x - x_0) = -b' \cdot \cancel{a'} \cdot k$

$\Rightarrow x - x_0 = -b' \cdot k$

Conclusione Tutte le soluzioni si scrivono

$$x = x_0 - kb', \quad y = y_0 + ka'$$

dove $a' = \dfrac{a}{(a,b)}$ $\quad b' = \dfrac{b}{(a,b)}$

Nel nostro esempio $173x + 132y = 1$

tutte le soluzioni sono date da

$$(x, y) = (29 - \underline{k} \cdot 132, \; -38 + \underline{k} \cdot 173)$$

$\boxed{\text{lo stesso } k}$

$$173 \cdot (29 - 132k) + 132 \cdot (-38 + 173k) \overset{?}{\doteq} 1$$

$$\underbrace{(173 \cdot 29 - 38 \cdot 132)}_{\overset{\shortparallel}{1}} \underbrace{- 173 \cdot 132k + 132 \cdot 173k}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 1$$

QUALCHE EQUAZIONE DIOFANTEA

- $x^2 - y^2 = 1002$

$$(x-y)(x+y) = 1002$$

$$\begin{cases} x - y = d & \text{divisore di } 1002 \\ x+y = \dfrac{1002}{d} = \dfrac{2^1 \cdot 3^1 \cdot 167^1}{d} \end{cases}$$

Potrebbe essere $d = 1$?

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x+y = 1002 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x = \dfrac{1003}{2} \notin \mathbb{Z} \\ y = \dots \end{array}$$

$d = 2$? $\quad \begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 501 \end{cases} \implies x = \dfrac{503}{2} \notin \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x-y = d \\ x+y = \dfrac{1002}{d} \end{cases} \qquad x = \frac{d + 1002/d}{2}.$$

Il numeratore $d + \dfrac{1002}{d}$ può essere pari?

Se d è dispari, $\underset{\text{dispari}}{d} + \underset{\text{pari}}{\dfrac{1002}{d}}$ è dispari

Se d è pari, $d + \dfrac{1002}{d}$ è dispari

pari dispari

Ma allora $x = \dfrac{d + 1002/d}{2} \notin \mathbb{Z}$ quindi l'eqz. non ha soluzioni.

- $x^2 - y^2 = 3^{40}$ quante soluzioni ha?

$$(x-y)(x+y) = 3^{40}$$

$$\begin{cases} x - y = \pm 3^k \\ x + y = \pm 3^{40-k} \end{cases} \qquad 0 \le k \le 40$$

$x = \pm \frac{1}{2}\left(3^k + 3^{40-k}\right)$ è sempre intero per ogni scelta di k

$y = \pm \frac{1}{2}\left(3^{40-k} - 3^k\right)$ è anche lui intero $\forall k$

N° soluzioni: $\underbrace{2}_{\text{scelta del segno}} \cdot \underbrace{41}_{\text{scelta di } k} = 82$

- $x^2 - y^2 = 2^{22}$

$$\begin{cases} x+y = \pm 2^{k} \\ x-y = \pm 2^{22-k} \end{cases}$$

Quindi funzionano tutti i k tranne 0 e 22, e quindi il numero di soluzioni è

$$2 \times (23-2) = 42$$