**COMPITO DI ARITMETICA**
13 settembre 2018

**1.** Sia $n = 2^2 3^3 5^5$.

(a) Determinare il numero dei divisori di $n$ che hanno al più due fattori primi distinti.

(b) Determinare il numero di coppie ordinate $(a, b)$ di divisori di $n$ tali che $ab$ ha al più due fattori primi distinti.

**2.** (a) Sia $p$ un numero primo. Supponiamo che la congruenza $(x^5 - 1)(x^3 - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ abbia 7 soluzioni distinte modulo $p$: dimostrare che allora $p \equiv 1 \pmod{15}$.

(b) È vera la stessa conclusione se si cambia il modulo $p$ con un numero $n$ non primo?

**3.** Siano $p, q$ due numeri primi, e sia $G$ un gruppo di ordine $n = p^3 q^4$. Sia poi $\varphi\colon G \to G$ un omomorfismo con la proprietà che $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ sia l'omomorfismo banale, ossia l'omomorfismo che manda tutti gli elementi di $G$ nell'identità.

(a) Dimostrare che la cardinalità di $K := \ker \varphi$ è divisibile per $pq$.

(b) Determinare l'insieme dei divisori $d$ di $n$ per i quali esiste un gruppo $G$ di ordine $n$ ed un omomorfismo $\varphi\colon G \to G$ con la proprietà che $\varphi^2$ sia l'omomorfismo banale e tale che $|\ker \varphi| = d$.

**4.** Siano $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ e $\beta = -\sqrt{2} + i\sqrt[4]{2}$, dove $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ indica l'usuale radice quarta positiva di 2 e $i \in \mathbb{C}$ soddisfa $i^2 = -1$.

(a) Determinare i polinomi minimi $f(x)$ e $g(x)$ di $\alpha$ e di $\beta$ su $\mathbb{Q}$.

(b) Sia $L$ il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $f(x)$. Determinare il grado $[L : \mathbb{Q}]$.