ARITMETICA 30 NOV 2017

Note Title 11/30/2017

Polinomi (espressioni formali) — Funzioni polinomiali

K campo $\quad f(X) \in K[X] \mapsto F : K \to K$

$a \in K \mapsto f(a) \in K$

Def. a si dice una RADICE del polinomio $f(x) \in K[X]$ se $F(a) = 0$.

Teo (Ruffini): a è una radice di $f(x)$ se e solo se $X - a \mid f(x)$.

Dim. Divisione euclidea:

$$f(x) = q(x)(X-a) + r$$

dove r è una costante.

Sostituendo $X \to a$ si ottiene

$$f(a) = q(a) \cdot \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{(a-a)} + r$$

$$f(a) = 0 \iff r = 0.$$

Cor. Il n° di radici di un polinomio $f \in K[X]$ è $\leq \deg f$.

Dim. Induzione su $d = \deg f$.

$d = 0 \quad f = \text{cst} \neq 0$. NESSUNA RADICE

Passo induttivo $d \Rightarrow d+1$

Supponiamo $\deg f = d+1$

Se f non ha nessuna radice (in K), allora OK (banale).

Se no, sia a una radice.

Ho (Ruffini)

$$f(x) = (x-a)\, g(x)$$

grado $\quad d+1 \quad 1 \quad d$

Se b è una radice di f, allora

$0 = f(b) = (b-a)\, g(b)$

$\Rightarrow b = a$ oppure $g(b) = 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

1 caso $\qquad \leq d$ casi.

$\downarrow$

$\leq d+1$.

POLINOMI IRRIDUCIBILI

1° caso $\quad K = \mathbb{C}$.

Def. Un campo K si dice ALGEBRICAMENTE CHIUSO se ogni polinomio $f \in K[X]$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice in K.

TEO. $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

(teorema fondamentale dell'algebra).

Oss. Per ogni K, ogni polinomio $f \in K[X]$ con $\deg f = 1$ è IRRIDUCIBILE.

Dim $\quad f = gh$

$1 = 0 + 1 = 1 + 0$

$\rightsquigarrow$ uno dei due fattori è costante $\neq 0$ = invertibile

Prop. In $\mathbb{C}[X]$ gli unici polinomi irriducibili sono quelli di grado 1

Dim Se $f \in \mathbb{C}[X]$ ha grado ≥ 2

f ha una radice

$$\underset{\geq 2}{f(X)} = \underset{1}{(X-a)}\,\underset{\geq 1}{g(X)} \qquad \text{RIDUCIBILE}$$

Cor. Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[X]$ si può scrivere nella forma $f = c(X-a_1)\dots(X-a_n)$.

2° caso $K = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ NON È ALGEBRICAMENTE CHIUSO.

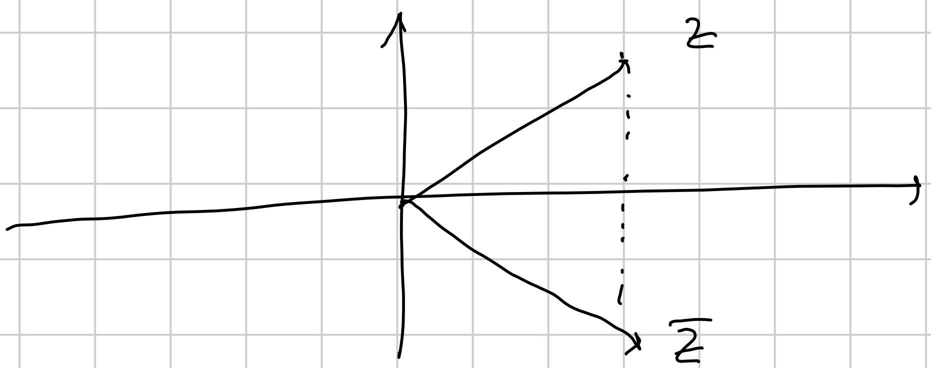
P. es.: X^2+1 non ha nessuna radice reale

Coniugio in $\mathbb{C}$.

$$z = a + ib \mapsto \bar{z} = a - ib$$

$$z = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$\mapsto \bar{z} = \rho e^{-i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta).$$



Oss. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

Oss 2 $\quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Prop. Sia $f \in \mathbb{R}[X]$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice di f. Allora $\bar{\alpha}$ è una radice di f.

Dim $\quad f(X) = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0$

$c_i \in \mathbb{R}$.

$$0 = f(\alpha) = c_n \alpha^n + c_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + c_1 \alpha + c_0$$

$$\begin{aligned}
\bar{0} = 0 &= \overline{c_n \alpha^n + c_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + c_1 \alpha + c_0} \\
&= \overline{c_n \alpha^n} + \overline{c_{n-1} \alpha^{n-1}} + \dots + \overline{c_1 \alpha} + \overline{c_0} \\
&= \overline{c_n}\, \overline{\alpha^n} + \overline{c_{n-1}}\, \overline{\alpha^{n-1}} + \dots + \overline{c_1}\, \bar{\alpha} + \overline{c_0} \\
&= c_n \underbrace{\overline{\alpha^n}}_{= \bar{\alpha}^n} + c_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + \dots + c_1 \bar{\alpha} + c_0 \\
&= c_n \bar{\alpha}^n + c_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{\alpha} + c_0 \\
&= f(\bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

Oss. $\quad (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) \in \mathbb{R}[X]$

Dim $\quad (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = (X^2 - (\alpha+\bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha})$

$\alpha + \bar{\alpha} = a+ib+a-ib = 2a \in \mathbb{R}$

$\alpha = a+ib$

$\alpha\bar{\alpha} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$.

Conclusione: ogni pol. $f \in \mathbb{R}[X]$ si fattorizza

come prodotto di polinomi di grado 1 o 2 (eventualmente moltiplicato per una costante).
In particolare, i polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ hanno tutti grado 1 o 2.

<u>Caso 3</u> $\quad K = \mathbb{Q}$.

<u>Oss</u> In $\mathbb{Q}[X]$ ci sono polinomi irriducibili di qualsiasi grado $n \geq 1$.

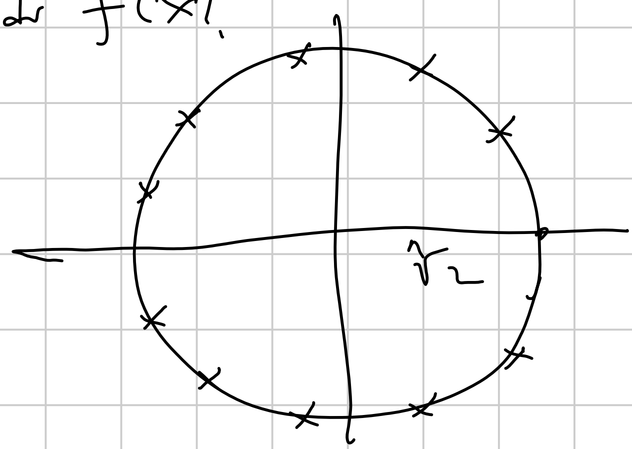
Considero $f(x) = x^n - 2$.
Suppongo, per assurdo, che $f(x)$ non sia irriducibile

$$f(x) = g(x)\,h(x)$$

deg: $\quad n = a + b$

$0 < a < n$
$0 < b < n$

Radici di $f(x)$?



$\to$ n-agono regolare.

Il modulo di tutte le radici è $= \sqrt[n]{2}$

In $\mathbb{C}[X]$ $\qquad f(x) = g(x)\,h(x)$

$$f(x) = \underbrace{(X - c_1)\cdots(X - c_a)}_{g(x)}\;\underbrace{(X - d_1)\cdots(X - d_b)}_{h(x)}$$

$$|c_1 \cdots c_a| = \sqrt[n]{2^a} \qquad |d_1 \cdots d_b| = \sqrt[n]{2^b}.$$

Ora $c_1 \cdots c_n \notin \mathbb{Q}$, perché $|c_1 \cdots c_n| \notin \mathbb{Q}$.
Infatti, se

$$\sqrt[n]{2^a} \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt[n]{2^a} = \frac{r}{s}$$

$$2^a = \frac{r^n}{s^n}$$

$$2^a s^n = r^n \qquad \text{F.U.}$$

Guardo l'esponente di 2:

a destra $\rightarrow$ multiplo di n $\equiv 0$ (mod n)

a sinistra $\rightarrow$ a + multiplo di n $\equiv a$

$$0 < a < n.$$

IN CONTRADDIZIONE.

Fattorizzazione in $\mathbb{Q}[x]$

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_1} x + \frac{a_0}{b_0}$$

$$B = \text{m.c.m} \{b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{B} \underbrace{(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)}_{g(x)}$$

Ricerca di eventuali radici ($\Leftrightarrow$ fattori di 1° grado per Ruffini).
Supponiamo che $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

Supponiamo anche che $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ sia una radice di $f(x)$, con $(r, s) = 1$.

$$0 = f\left(\frac{r}{s}\right) = a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{r}{s} + a_0$$

Tolgo i denominatori:

$$0 = \overbrace{a_n r^n + \underbrace{a_{n-1} r^{n-1} s + \dots + a_1 r s^{n-1}}\!\!} \;\underbrace{\vphantom{r^n}+ a_0 s^n}.$$

s divide la parte blu.

$$\Rightarrow s \mid a_n r^n \Rightarrow \boxed{s \mid a_n}$$

r divide la parte rossa

$$\Rightarrow r \mid a_0 s^n \Rightarrow \boxed{r \mid a_0}$$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = 2x^3 - 19x + 3$

Eventuali radici: $\frac{r}{s}$ con $r \mid 3$, $s \mid 2$

$r = \pm 1, \pm 3 \qquad s = \pm 1, \pm 2$

$$\frac{r}{s} \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2} \right\}.$$

$r = 3 \qquad 2 \cdot 27 - 19 \cdot 3 + 3 = 0.$

GLI ALTRI NO.

$$f(x) = (x-3)\, g(x)$$

Oss. Se $\deg f \leq 3$, la ricerca delle radici è sufficiente.

Infatti $f = gh \Rightarrow \deg g \leq 1$ o $\deg h \leq 1$.

Es. $\deg f = 4$ $f(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)$

Altro esempio $f(x) = x^4 + 4$

→ RICERCA DELLE RADICI
ESITO NEGATIVO.

- $f(x)$ è il prodotto di 2 polinomi di 2° grado?

Cerco di scrivere $f(x) = g(x)h(x)$ dove $g(x), h(x)$ hanno grado 2 e HANNO COEFFICIENTI INTERI.
(È POSSIBILE PER IL LEMMA DI GAUSS, VEDI PROSSIMA LEZIONE).

$$g(x) = x^2 + Ax + B \qquad h(x) = x^2 + Cx + D$$
$$A, B, C, D \in \mathbb{Z}.$$

Moltiplico e ottengo:

$$g(x)h(x) = x^4 + (A+C)x^3 + (B+AC+D)x^2 + (AD+BC)x + BD.$$
$$\overset{?}{=} x^4 + 4$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+AC+D=0 \\ AD+BC=0 \\ BD=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=-A \\ B-A^2+D=0 \\ A(D-B)=0 \\ BD=4 \end{cases}$$

1° caso : $A=0$. $\quad B+D=0 \quad BD=4$

NON VA .

2° caso : $D-B=0 \quad D=B$

$2B-A^2=0 \qquad A^2=2B$

$B^2=4$

$B=2 \qquad A^2=4 \qquad A=\pm 2$

$$x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$$
$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$