Sulle partizioni ordinate di un intero

1 Partizioni di un intero

Iniziamo con il chiarire che ci sono due problemi simili, ma leggermente diversi, che siamo spesso interessati a considerare:

- il problema di partizionare un intero positivo n in k parti, ognuna **positiva**[1], tenendo conto dell'ordine: in simboli, vogliamo calcolare la cardinalità di
$$\left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0} \;\middle|\; x_1 + \ldots + x_k = n\right\}$$
- il problema di partizionare un intero positivo n in k parti, ognuna **non negativa**, tenendo conto dell'ordine: in simboli, vogliamo la cardinalità di
$$\left\{(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; y_1 + \ldots + y_k = n\right\}$$

  Per eliminare ogni dubbio, ecco un esempio:

  Esempio 1. $n = 5, k = 3$. *Allora nel primo caso si hanno* 6 *decomposizioni possibili:*

  - $5 = 1 + 1 + 3$.
  - $5 = 1 + 2 + 2$;
  - $5 = 1 + 3 + 1$;
  - $5 = 2 + 1 + 2$;
  - $5 = 2 + 2 + 1$;
  - $5 = 3 + 1 + 1$;

  Nel secondo le decomposizioni possibili sono 21*:*

  - $5 = 5 + 0 + 0$;
  - $5 = 4 + 1 + 0$;
  - $5 = 4 + 0 + 1$;
  - $5 = 3 + 2 + 0$;
  - $5 = 3 + 1 + 1$;

[1] 'positivo' vuol dire strettamente maggiore di zero

- $5 = 3 + 0 + 2$;
- $5 = 2 + 3 + 0$;
- $5 = 2 + 2 + 1$;
- $5 = 2 + 1 + 2$;
- $5 = 2 + 0 + 3$;
- $5 = 1 + 4 + 0$;
- $5 = 1 + 3 + 1$;
- $5 = 1 + 2 + 2$;
- $5 = 1 + 1 + 3$;
- $5 = 1 + 0 + 4$;
- $5 = 0 + 5 + 0$;
- $5 = 0 + 4 + 1$;
- $5 = 0 + 3 + 2$;
- $5 = 0 + 2 + 3$;
- $5 = 0 + 1 + 4$;
- $5 = 0 + 0 + 5$.

Stabilito ciò, trattiamo i due casi separatamente; ma prima, le risposte:

$$\boxed{\text{numero di partizioni di } n \text{ in } k \text{ parti positive:} \binom{n-1}{k-1}}$$

$$\boxed{\text{numero di partizioni di } n \text{ in } k \text{ parti non-negative:} \binom{n+k-1}{k-1}}$$

1.1 Parti positive

Si può pensare il problema così: abbiamo una fila di n cifre 1,

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1 \quad 1}_{n},$$

e vogliamo convertirla in una partizione di n aggiungendo un simbolo $+$ in modo da isolare i vari addendi della partizione; per esempio, con $n = 5$ e $k = 3$ partiremmo con

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

e potremmo rappresentare la partizione $5 = 1 + 2 + 2$ come segue:

$$1 \quad + \quad 1 \quad 1 \quad + \quad 1 \quad 1$$

Siccome abbiamo k addendi, avremo bisogno di $k - 1$ segni $+$. Inoltre è chiaro che otterrò una partizione valida (con parti positive) se e soltanto se le seguenti regole sono rispettate:

1. ogni segno $+$ ha almeno un 1 alla sua sinistra e almeno un 1 alla sua destra;
2. non stiamo mettendo due segni $+$ uno di seguito all'altro.

In altri termini, prendendo per esempio il caso $n = 5, k = 3$ rappresentato qui sotto, le frecce indicano i punti dove possiamo inserire un segno $+$ rispettando le regole qui sopra; dovrebbe essere chiaro che, siccome abbiamo n cifre 1, ci sono $n - 1$ posti "legali" dove inserire un simbolo $+$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

Viceversa, comunque io scelga due di queste quattro posizioni (e ci metta dei segni $+$) ottengo una partizione di 5, e le partizioni così ottenute sono tutte diverse:

- Supponiamo di scegliere le prime due posizioni:

  $$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & {\color{red}\uparrow} & & {\color{red}\uparrow} & & \uparrow & & \uparrow & \end{array};$$

  allora la partizione che stiamo considerando è

  $$1 + 1 + 1 \quad 1 \quad 1,$$

  ovvero $5 = 1 + 1 + 3$.

- Supponiamo di mettere un più nella prima e terza posizione:

  $$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & {\color{red}\uparrow} & & \uparrow & & {\color{red}\uparrow} & & \uparrow & \end{array};$$

  allora la partizione che stiamo considerando è

  $$1 + 1 \quad 1 + 1 \quad 1,$$

  ovvero $5 = 1 + 2 + 2$.

- Eccetera: se scelgo la prima e quarta posizione trovo

  $$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & {\color{red}\uparrow} & & \uparrow & & \uparrow & & {\color{red}\uparrow} & \end{array},$$

  ovvero $1 + 3 + 1$.

- Se scelgo seconda e terza,

  $$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \uparrow & & {\color{red}\uparrow} & & {\color{red}\uparrow} & & \uparrow & \end{array},$$

  allora la partizione è $5 = 2 + 1 + 2$;

- seconda e quarta

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \uparrow & & \textcolor{red}{\uparrow} & & \uparrow & & \textcolor{red}{\uparrow} & \end{array}$$

  danno $2+2+1=5$;

- infine, terza e quarta posizione danno

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \textcolor{red}{\uparrow} & & \textcolor{red}{\uparrow} & \end{array},$$

  ovvero $5=3+1+1$.

Se confrontiamo la lista precedente con la lista delle partizioni di 5 è facile vedere che queste due liste sono esattamente identiche; da qui dovrebbe essere facile convincersi che

le partizioni di n in k parti positive corrispondono ai modi di scegliere $k-1$ posizioni in cui mettere i segni $+$; queste $k-1$ posizioni sono scelte fra un totale di $n-1$ posizioni possibili (la prima è quella immediatamente a destra del primo 1, l'ultima è quella immediatamente a sinistra dell'ultimo 1).

Se siamo d'accordo su questo principio, contare queste partizioni diventa facile, perché la risposta è la stessa della risposta alla domanda

quanti modi ci sono di scegliere $k-1$ oggetti (posizioni in cui mettere i $+$) su un totale di $n-1$ oggetti (posizioni) possibili?

Come sappiamo bene, la risposta a questa domanda è data dai coefficienti binomiali: ne segue che

$$\boxed{\text{numero di partizioni di } n \text{ in } k \text{ parti positive} = \binom{n-1}{k-1}}$$

Esempio 2. *Per $n=5, k=3$ si trova in effetti*

$$\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6.$$

Osservazione 3. Ovviamente la dimostrazione appena esposta può essere resa completamente formale, ma questo è tecnicamente non facilissimo e non aggiunge niente di sostanziale alla discussione fatta finora. Per completezza, ecco come si farebbe: consideriamo gli insiemi

$$A := \left\{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0} \;\middle|\; x_1+\ldots+x_k = n\right\}$$

e

$$B := \{T \mid T \subseteq \{1,\ldots,n-1\}, |T| = k-1\};$$

è chiaro che $|A|$ è il numero che vogliamo calcolare, mentre $|B|$ è il numero di sottoinsiemi di $\{1,\ldots,n-1\}$ di cardinalità $k-1$, e dunque per definizione $|B| = \binom{n-1}{k-1}$. Se sapessimo $|A| = |B|$, quindi, avremmo finito. Per far vedere che in effetti $|A| = |B|$ costruiamo una bigezione fra questi due insiemi. La bigezione è la seguente:

- data una partizione $x_1 + \ldots + x_k = n$ di n in k parti positive (ovvero un elemento di A), le associamo

  $$T = \{x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_{k-1}\},$$

  che è un elemento di B. In effetti è chiaro che gli elementi di T sono positivi (perché $x_1 \geq 1$) e non superano $n - 1$ (perché il più grande è $x_1 + \ldots + x_{k-1} = n - x_k \leq n - 1$). Inoltre è chiaro per definizione che $|T| = k - 1$, perché tutte le somme sono diverse (gli addendi x_i sono strettamente positivi!)

- Per l'applicazione inversa, dato $T \in B$, possiamo scrivere in maniera unica $T = \{t_1, \ldots, t_{k-1}\}$ con $1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} \leq n-1$. A questo insieme associamo la partizione

  $$x_1 = t_1, x_2 = t_2 - t_1, x_3 = t_3 - t_2, \ldots, x_{k-1} = t_{k-1} - t_{k-2}, x_k = n - t_{k-1}.$$

  Allora è chiaro che gli x_i così definiti sono positivi, ed inoltre

  $$x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+x_k = (t_1)+(t_2-t_1)+\ldots+(t_{k-1}-t_{k-2})+(n-t_{k-1}) = n.$$

E' facile verificare che le due applicazioni appena definite sono una l'inversa dell'altra, da cui otteniamo come voluto

$$|A| = |B| = \binom{n-1}{k-1}.$$

Qualche minuto di riflessione mostra che questa è la stessa dimostrazione fatta sopra: i t_i non sono altro che le posizioni in cui abbiamo messo i segni $+$.

1.2 Parti non-negative

Il metodo più semplice è osservare che il problema si può ridurre al precedente tramite la seguente osservazione:

Osservazione 4. Sia $y_1+\ldots+y_k = n$ una partizione di n in parti non-negative. Allora $(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \ldots + (y_k + 1) = n + k$ è una partizione di $n + k$ in parti strettamente positive. Viceversa, se $x_1 + \ldots + x_k = n + k$ è una partizione di $n + k$ in k parti positive, allora $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_k - 1) = n$ è una partizione di n in parti non-negative (infatti ogni x_i è almeno uguale ad 1, quindi $x_i - 1$ non può essere negativo, ma può essere uguale a 0). Formalmente, abbiamo una *bigezione* fra

$$S_1 = \left\{(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; y_1 + \ldots + y_k = n + k\right\}$$

e

$$S_2 = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k_{>0} \;\middle|\; x_1 + \ldots + x_k = n + k\right\},$$

bigezione che è data dall'associare $(y_1, \ldots, y_k) \in S_1$ a $(x_1, \ldots, x_k) = (y_1 + 1, \ldots, y_k + 1) \in S_2$, e viceversa dall'associare a $(x_1, \ldots, x_k) \in S_2$ l'elemento $(x_1 - 1, \ldots, x_k - 1) \in S_1$.

Ora, quello che volevamo originalmente calcolare è la cardinalità di S_1, che però abbiamo appena visto essere la stessa cosa della cardinalità di S_2. Ora è sufficiente osservare che la cardinalità di S_2 è stata già determinata nel paragrafo precedente: in effetti, S_2 è l'insieme delle partizioni di $n+k$ in k parti strettamente positive, per cui

$$|S_1| = |S_2| = \binom{(n+k)-1}{k-1}.$$

Esempio 5. *Per $n = 5, k = 3$ otteniamo effettivamente*

$$\binom{5+3-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$