ANNO ACCADEMICO 2004/2005

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II compito 16/05/2004

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, W un suo sottospazio proprio e $L : V \to V$ una applicazione lineare. Dimostrare che

$$\dim L(W) \geqslant \dim W - \dim \operatorname{Ker} L. \tag{1}$$

Fornire un esempio per cui in (1) valga "$>$" e un esempio per cui in (1) valga "$=$".

Esercizio 2

Sia $L_k : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$L_k(p(t)) = p(0) + p(k)t + p(1)t^2,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(1) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, L_k è diagonalizzabile.

(2) Detta $G_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare definita da

$$G_k(x, y, z) = 2kx + ky + (y - 2z)t + (kx - y + 3z)t^2,$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbb{R}_2[t] = \operatorname{Im} G_k \oplus \operatorname{Ker} L_k.$$

Esercizio 3

Si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico. Sia F lo spazio vettoriale

$$F = \{A \in M(n, n) \mid Av \in v^\perp \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dimostrare che F coincide con l'insieme delle matrici antisimmetriche.

Esercizio 4

Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\phi(X, Y) = {}^tXAY \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire quali terne (i_+, i_-, i_0) sono realizzabili come segnatura della restrizione di ϕ ad un sottospazio vettoriale di dimensione 2. (Per ciascuna terna tale che $i_+ + i_- + i_0 = 2$ si deve quindi descrivere un sottospazio oppure dimostrare che non ce ne sono.)