Algebra – A. A. 2003-2004
Primo scritto

31 maggio 2004

COGNOME: NOME:

CORSO (A, B, C, o D): MATRICOLA:

FIRMA:

VALUTAZIONE

Esercizio 1 ....

....

.... Voto:

Esercizio 2 ....

....

.... Voto:

Esercizio 3 ....

....

.... Voto:

Esercizio 4 ....

....

.... Voto:

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo 4 vettori in $\mathbb{R}^4$ dipendenti da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare $\dim\big(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)\big)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$:

  La matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ ha determinante $k^2(k+1)$, quindi ha rango 4 per $k \notin \{0, -1\}$. Si verifica inoltre che ha rango 2 per $k = 0$ e rango 3 per $k = -1$. Quindi

  $$\dim\big(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)\big) = \begin{cases} 4 & \text{per } k \notin \{0, -1\} \\ 2 & \text{per } k = 0 \\ 3 & \text{per } k = -1 \end{cases}$$

- Dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ i vettori (v_1, v_2, v_3, v_4) formano una base di $\mathbb{R}^4$:

  Un insieme di n vettori in $\mathbb{R}^n$ è una base se e solo se genera tutto $\mathbb{R}^n$. E questo accade precisamente quando la matrice $n \times n$ formata da questi vettori ha rango n. Quindi per quanto visto sopra otteniamo una base per ogni $k \notin \{0, -1\}$.

- Dire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ esiste una applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà:

  $$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

  Per $k \notin \{0, -1\}$, i vettori (v_1, v_2, v_3, v_4) formano una base, e perciò per qualsiasi insieme di vettori w_1, w_2, w_3, w_4 di $\mathbb{R}^3$ esiste un'unica f lineare con $f(v_i) = w_i \; \forall i$.

  Se $k = 0$, abbiamo $v_1 = v_3$, e non può esserci una f con $f(v_1) \neq f(v_3)$. Se $k = -1$, i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 non formano una base. Infatti non sono indipendenti, visto che $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Però i vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti e possono essere completati a base v_1, v_2, v_3, v di $\mathbb{R}^4$ (necessariamente $v \neq v_4$). Per qualsiasi scelta di $w \in \mathbb{R}^3$, esiste un unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v) = w;$$

poiché abbiamo $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$, necessariamente

$$f(v_4) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi effettivamente $f(v_4)$ è il vettore richiesto, e quindi va bene.

Riassumendo, esiste una f con quelle proprietà se e solo se $f \neq 0$.

- Dire per quale valore $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare come nel punto precedente, ma non è unica:

  Per quanto già visto sopra, la f è unica sempre, tranne che per $k = -1$: in questo caso possiamo scegliere il vettore w arbitrariamente, e quindi c'è un'infinità di possibilità, e quindi infinite funzioni f che soddisfano le proprietà richieste.

COGNOME: NOME:

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Togliendo l'ultima riga dalle precedenti vediamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

che, sviluppando lungo l'ultima riga, risulta essere uguale a

$$= 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è quindi pari a $5 \cdot (-1)^4 = 5$. Notiamo che il fattore $(-1)^2$ è dovuto al fatto che abbiamo scambiato due coppie di colonne.

COGNOME: NOME:

Esercizio 3 (9 punti). Consideriamo al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & -1 & h \end{pmatrix}.$$

- Dire se esistono valori $h \in \mathbb{R}$ per cui A_h è invertibile:

  No, perché ha due colonne uguali, e quindi i vettori colonna non sono indipendenti.

- Dire per quali valori $h \in \mathbb{R}$ la matrice A_h è diagonalizzabile.

  Abbiamo

  $$p_{A_h}(\lambda) = \det(A_h - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} h-\lambda & 1 & \mathrm{h} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \mathrm{h} & -1 & h-\lambda \end{pmatrix} =$$

  $$(2-\lambda)[(h-\lambda)^2 - h^2] = (2-\lambda)\lambda(2h-\lambda),$$

  quindi A_h ha tre autovalori reali, dati da $2, 0$, e $2h$. Questi sono distinti per $h \notin \{0, 1\}$. Quindi A_h è diagonalizzabile per ogni $h \notin \{0, 1\}$. Discutiamo i due casi rimanenti.

  Caso $h = 0$: gli autovalori sono 0 e 2. La molteplicità algebrica di 0 è 2. Quella geometrica è

  $$3 - \mathrm{rk}(A_0 - 0 \cdot I) = 3 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

  Quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono, e A_0 è diagonalizzabile.

  Caso $h = 1$: gli autovalori sono ancora 0 e 2, ma questa volta la molteplicità algebrica di 2 è 2. Quella geometrica è

  $$3 - \mathrm{rk}(A_1 - 2 \cdot I) = 3 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

  Quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono ancora, e anche A_1 è diagonalizzabile.

  Conclusione: A_h è sempre diagonalizzabile.

COGNOME: NOME:

Esercizio 4 (9 punti). Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2y + (h-1)z & = & 1 \\ 2x - 4y + 3hz & = & h \\ -x + 2y + (h+5)z & = & 2 \end{cases}$$

ammette una, nessuna, o infinite soluzioni.

Trasformiamo con mosse di Gauss la matrice associata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & h-1 & 1 \\ 2 & -4 & 3h & h \\ -1 & 2 & h+5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & h+2 & h-2 \\ 0 & 0 & 2h+4 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & h+2 & h-2 \\ 0 & 0 & 0 & 7-2h \end{array}\right)$$

e si verifica facilmente che le matrici completa e incompleta hanno lo stesso rango 2 se e solo se $7 - 2h = 0$. Quindi per Rouché-Capelli il sistema ha soluzione solo per $h = 7/2$. Lo spazio delle soluzioni per $h = 7/2$ è uno spazio affine di dimensione $3 - 2 = 1 > 0$ (una retta non passante per l'origine), quindi sono infinite.