Algebra – A. A. 2003-2004
Secondo scritto

22 giugno 2004

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo le seguenti applicazioni lineari:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, 2x+y, y, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (x+2y+t, x+y+az+t) \end{array}$$

L'applicazione g dipende da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare una base di $\mathrm{Im}f$.

   $\mathrm{Im}f = \mathrm{Span}\big(f(e_1), f(e_2)\big)$, dove (e_1, e_2) è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Quindi $\mathrm{Im}f$ è generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che essendo indipendenti formano una base per $\mathrm{Im}f$.

2. Trovare una base di $\mathrm{Ker}g$, dipendente da $a \in \mathbb{R}$.

   Risolvendo il sistema

   $$\begin{cases} x+2y+t = 0 \\ x+y+az+t = 0 \end{cases}$$

   si trova che la soluzione generale è combinazione dei due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ che, essendo indipendenti per ogni a, sono una base per $\mathrm{Ker}g$.

3. Determinare la dimensione di $(\mathrm{Im} f) \cap (\mathrm{Ker} g)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$. I quattro vettori ottenuti unendo le basi di $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Ker} g$ formano dei generatori per $(\mathrm{Im} f) + (\mathrm{Ker} g)$, la cui dimensione è quindi il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

che ha determinante $6a - 2$. Quindi la matrice ha rango 4 per ogni $a \neq 1/3$, e si verifica facilmente che ha rango 3 per $a = 1/3$. Quindi usando la formula di Grassmann otteniamo

$$\dim\big((\mathrm{Im} f) \cap (\mathrm{Ker} g)\big) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} g) - \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} g)$$

che è pari a $2 + 2 - 4 = 0$ per $a \neq 1/3$, ed a $2 + 2 - 3 = 1$ per $a = 1/3$.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 1 & 0 \\ 11^{12} & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando ripetutamente lo sviluppo di Laplace lungo la riga contenente il maggior numero di zeri otteniamo:

$$\det A = (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-2) \cdot (-9) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$(-2) \cdot (-9) \cdot (-4) \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-2) \cdot (-9) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-6) = 2160.$$

Esercizio 3 (9 punti). Considerare al variare del parametro reale t la seguente matrice:

$$A_t = \begin{bmatrix} t & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-t^2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. dire se esistono valori di t per cui A_t è invertibile.

   Il determinante $\det A_t = t^3 - t$ si annulla solo per $t \in \{-1, 0, 1\}$, quindi la matrice A_t è invertibile per tutti gli altri valori di t.

2. dire se esistono valori di t per cui A_t è diagonalizzabile.

   Il polinomio caratteristico di A_t è

   $$\det(A_t - \lambda I) = (t - \lambda)(\lambda^2 - 2 + t^2) + t - \lambda = (t - \lambda)(\lambda^2 + t^2 - 1)$$

   ed ha 3 radici reali quando $t^2 - 1 \leqslant 0$, cioè per $-1 \leqslant t \leqslant 1$. In questo caso le tre radici sono

   $$\begin{aligned} \lambda_1 &= t \\ \lambda_2 &= \sqrt{1-t^2} \\ \lambda_3 &= -\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

   e sono tutte distinte ad esempio per $t = 0$. Quindi esistono valori di t per cui A_t è diagonalizzabile.

Esercizio 4 (9 punti).
Determinare per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + t &= 1 \\ x + 2z + t &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \\ \lambda y + 2\lambda z + \lambda^2 t &= 0 \end{cases}$$

ammette una, nessuna o infinite soluzioni.

La matrice incompleta associata al sistema è una matrice quadrata di ordine 4 avente determinante $-2\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 2)$. Poichè $\lambda^2 - 2\lambda - 2$ non ha radici reali, questo determinante si annulla solo per $\lambda = 0$. Segue che per $\lambda \neq 0$ i ranghi delle matrici incompleta e completa sono entrambi uguali a 4, e quindi il sistema ha una sola soluzione per Rouché-Capelli.

Nel caso $\lambda = 0$, l'ultima riga consiste solo di zeri, e si verifica facilmente che i ranghi delle matrici incompleta e completa sono entrambi uguali a 3. In questo caso, ci sono infinite soluzioni, sempre per Rouchè-Capelli.