Algebra – A. A. 2003-2004
Quarto scritto

16 settembre 2004

COGNOME: NOME:

CORSO (A, B, C, o D): MATRICOLA:

FIRMA:

VALUTAZIONE

Esercizio 1 . . . . . .
. . . . . .
. . . . . Voto:

Esercizio 2 . . . . . .
. . . . . .
. . . . . Voto:

Esercizio 3 . . . . . .
. . . . . .
. . . . . Voto:

Esercizio 4 . . . . . .
. . . . . .
. . . . . Voto:

Esercizio 1 (9 punti). Consideriamo la seguente funzione f_a, dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f_a: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+5y-z,\ 2x+3y,\ 2x+ay,\ x-2y+z) \end{array}$$

1. Trovare la dimensione di $\mathrm{Ker} f_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
2. Trovare la dimensione di $\mathrm{Im} f_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
3. Dire per quali parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ è contenuto in $\mathrm{Im} f_a$.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \sqrt{2} & -3 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 (9 punti). Provare che per ogni $0 \leqslant t \leqslant 4$ la seguente matrice non è diagonalizzabile.

$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & t \end{bmatrix}$$

Esercizio 4 (9 punti).
Siano

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$V_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x + y + z + at = 0 \right\}$$

due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con V_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la dimensione di W.
2. Trovare le dimensioni di V_a e $W \cap V_a$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
3. Dire per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è contenuto in $V_a \cap W$.