TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA
COMPITO SCRITTO

9 termidoro, anno II

Esercizio 1: Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ mappe continue fra spazi topologici tali che $g \circ f = id_X$ e g è omotopa ad una mappa costante. Mostrare che X è semplicemente connesso.

Soluzione: La mappa $g \circ f$ è l'identità ed è anche omotopa ad una mappa costante: quindi X è contrattile. In particolare, è semplicemente connesso.

Esercizio 2: Calcolare il gruppo fondamentale di $X = [-1,1] \times [-1,1]/_\sim$ nei casi seguenti:

(1) la relazione $\sim$ è definita da:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \ \vee \ (xx' = -1 \wedge y = y' = 0)$$

Soluzione: Chiamo $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Consideriamo la famiglia continua di mappe $f_t : Q \to Q$ data da $f_t(x,y) = (x,ty)$. Se $(x,y) \sim (x',y')$, allora $f_t(x,y) \sim f_t(x',y')$ per ogni t. Quindi queste inducono una famiglia continua di mappe $f'_t : X \to X$.

La mappa f'_0 è l'identità, mentre l'immagine di f'_1 è il segmento $[-1,1] \times \{0\}$ con gli estremi identificati, omeomorfo a S^1. Quest'ultimo è quindi un retratto di deformazione (forte) di X, e quindi X è omotopo a S^1 ed ha $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

(2) la relazione $\sim$ è definita da:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \ \vee \ (x = y' \wedge y = x' = 0)$$

Soluzione: Consideriamo la famiglia continua di mappe $f_t : Q \to Q$ data da $f_t(x,y) = (tx,ty)$. Se $(x,y) \sim (x',y')$, allora $f_t(x,y) \sim f_t(x',y')$ per ogni t. Quindi queste inducono una famiglia continua di mappe $f'_t : X \to X$.

La mappa f'_0 è l'identità, mentre l'immagine di f'_1 è il punto $(0,0)$. Quindi X è contrattile.

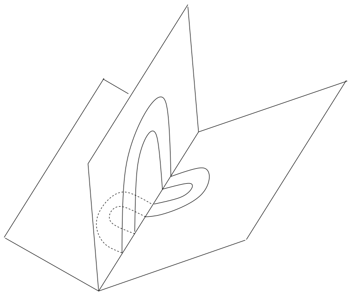
Esercizio 3: Dimostrare che non esiste un omeomorfismo locale da S^2 in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione: Se la controimmagine di ogni punto di $\mathbb{R}^2$ è un numero finito di punti in S^2, allora l'omeomorfismo locale è un rivestimento. In questo caso si giunge ad un assurdo perchè entrambi gli spazi sono semplicemente connessi, ma non sono omeomorfi.

Supponiamo che esista un punto $p \in \mathbb{R}^2$ con infinite controimmagini $\{x_i\}_{i \in I}$: poiché f è un omeomorfismo locale, ogni x_i ha un intorno aperto U_i su cui f è un omeomorfismo (sull'immagine). In particolare f è iniettiva su

U_i, e quindi U_i contiene $x_{i'}$ se e solo se $i' = i$. Poichè f è continua, l'insieme $X = \cup_{i\in I} x_i$ è chiuso (perché è controimmagine di un punto, che è chiuso). Quindi $U = S^2 \setminus X$ è aperto, e insieme a tutti gli U_i forma un ricoprimento aperto di S^2. Non è possibile estrarre un sottoricomprimento da questo, perché ogni x_i appartiene ad uno solo di questi aperti. Ma questo è assurdo perché S^2 è compatto.

Esercizio 4: È noto (anche se non abbiamo gli strumenti per dimostrarlo) che nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo al nastro di Möbius.



Il libro con tre pagine disegnato qui a sinistra contiene un sottoinsieme omeomorfo al nastro di Möbius.