TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA
COMPITO SCRITTO

12 floreale, anno III

Esercizio 1: Mostrare che non esiste nessun omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(S^1) = S^1$ e $f(0,0) = (2,0)$.

Esercizio 2: Consideriamo il sottoinsieme X di $\mathbb{C}^n$ dato da

$$X = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall\, i \neq j\}.$$

Sia S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$. Ad ogni permutazione $\sigma \in S_n$ associamo la mappa $f_\sigma : X \to X$ data da

$$f(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}).$$

- Mostrare che f_σ è un omeomorfismo per ogni σ.
- Mostrare che associando f_σ a σ otteniamo un'azione libera e propriamente discontinua di S_n su X.
- Mostrare che uno spazio rivestito da X è una varietà topologica di dimensione $2n$.
- Usando il teorema di Cayley (ogni gruppo finito è sottogruppo di S_n), mostrare che ogni gruppo finito è gruppo fondamentale di qualche varietà topologica.

Esercizio 3: Siano $f : \tilde{M} \to M$ e $g : \tilde{N} \to N$ due rivestimenti. Mostrare che $f \times g : \tilde{M} \times \tilde{N} \to M \times N$, data da $(f \times g)(m,n) = \big(f(m), g(n)\big)$, è un rivestimento. Mostrare che $f \times g$ definisce il rivestimento universale se e solo se lo definiscono f e g.

Esercizio 4: Mostrare che non esiste nessun omeomorfismo locale da S^2 a $S^1 \times S^1$.