Esame di Topologia ed Analisi Complessa 21 giugno 2005

1. Si calcoli il gruppo fondamentale del sottospazio X di $\mathbb{C}^2$ costituito dalle coppie (z, w) per cui $z = 1$ oppure $|z| = |w| = 1$

2. Siano (X, x) e (Y, y) due spazi localmente conici e sia (Z, z) lo spazio ottenuto dall'unione disgiunta di X con Y identificando i punti base x, y ad uno stesso punto z. Si dimostri che:
(a) Z è localmente conico
(b): se (Z, z) ha gruppo fondamentale abeliano lo stesso accade per X ed Y
(c) nella ipotesi di (b), almeno uno tra X ed Y è semplicemente connesso.

3. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $f(z) = z^3 - 3z$.
(a) si determinino l'insieme C dei punti del dominio ove f non è localmente invertibile, la sua immagine $\Delta = f(C)$ e $\Sigma = f^{-1}(\Delta)$. Si dimostri quindi che f induce un rivestimento $f : \mathbb{C} - \Sigma \to \mathbb{C} - \Delta$.
(b) si determinino le circonferenze $S \subset \mathbb{C} - \Delta$ per le quali $f^{-1}(S)$ è connesso.

4. Sia $S = \{1/n \ : \ n \in \mathbb{Z} - \{0\}\} \cup \{0\}$. Si dimostri che ogni $f : \mathbb{C} - S \to \mathbb{C}$ che sia olomorfa iniettiva è del tipo $f(z) = (az + b)/(nz - 1)$ con $a + nb \neq 0$ ed $n \in \mathbb{Z}$ oppure $f(z) = (az + b)/z$ con $(a, b) \neq (0, 0)$.