Esame di Topologia ed Analisi Complessa 5 settembre 2005

1. Siano $L = \{(x, y, z) \in [0, +\infty[: (x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = 0\}$ e $* = (1, 1, 1)$.
a. si individui il gruppo $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L, *)$
b. si determini quanti rivestimenti a due fogli di $(\mathbb{R}^3 - L, *)$ esistono a meno di isomorfismi.

2. Siano Γ l'unione di due rette disgiunte in $\mathbb{R}^3$ e Δ l'unione tra l'asse z e la circonferenza $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Si dimostri che non esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^3 - \Gamma$ ed $\mathbb{R}^3 - \Delta$.

3. Sia $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una applicazione olomorfa tale che $\phi \circ \phi$ sia l'identità su $\mathbb{C}$. Si dimostri che o ϕ è l'identità oppure esiste $h \in \mathbb{C}$ tale che $\phi(z) = -z + h$ per ogni $z \in C$.

4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ ove $f(z) = 0$ si abbia $f'(z) = 0$ e $f''(z) \neq 0$. Si dimostri che esistono esattamente due funzioni olomorfe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che per ogni $z \in \mathbb{C}$ sia $g^2(z) = f(z)$.
(Si esamini prima la situazione locale usando poi la semplice connessione di $\mathbb{C}$)