Esame di Topologia ed Analisi Complessa 13/12/2005

1. Si calcoli il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:

(a) $X_1 = \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 \ : \ w^5 = z^2 \text{ e } z \neq 0\}$

(b) $X_2 = \{(w,z) \in X_1 \ : w^3 = z^2 \text{ e } w^2 \neq w\}$

2. Sia $\phi : X \to Y$ un rivestimento. Si dimostri che X è compatto se e solo se Y è compatto e ϕ ha fibre finite.

3. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si dimostri che:

a) se esiste un polinomio $p \in \mathbb{C}[Z]$ tale che $|f(z)| \leq |P(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora f è una applicazione polinomiale

b) se è $|f(z)| \leq |e^z|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora f non è una applicazione polinomiale

4. Sia f una funzione olomorfa su un aperto A di $\mathbb{C}$. Si dimostri che se $\mathbb{C} - A$ è finito ed f ha fibre finite (ossia se $f^{-1}(b)$ è finito per ogni $b \in \mathbb{C}$), allora per quasi tutti i $b \in \mathbb{C}$ (ossia per tutti tranne al più un numero finito), l'equazione $f(z) = b$ ha soluzioni $z \in A$