TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Secondo scritto a.a. 05/06: 5 luglio 2006

Esercizio 1. Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definito da

$$X = (S^1 \times S^1) \cup \big(D \times \{1\}\big)$$

dove S^1 e D sono rispettivamente la circonferenza ed il disco unitari in $\mathbb{C}$:

$$S^1 = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\big\}.$$

(1) Dimostra che X è connesso per archi.

(2) Calcola $\pi_1(X)$.

Esercizio 2. Sia r una retta in $\mathbb{R}^3$. Mostra che il rivestimento universale di $\mathbb{R}^3 \setminus r$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $p \in \mathbb{R}_{>1}$ e consideriamo il cammino $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcola

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 - 2pz + 1}\, dz.$$

Esercizio 4.

(1) Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $S \subset U$ un sottoinsieme discreto. Sia $h\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $h_{|U \smallsetminus S}$ sia olomorfa. Mostra che h è olomorfa.

(2) Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera tale che l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,|\, f'(z) = 0\}$ sia finito. Sia $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $g \circ f$ sia intera. Mostra che g è olomorfa su $f(\mathbb{C})$.