TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Terzo scritto a.a. 05/06: 12 settembre 2006

Esercizio 1. Sia $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ il simplesso standard:

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}.$$

Sia X l'insieme degli spigoli di Δ, con la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

(1) Mostra che X è connesso per archi.

(2) Calcola $\pi_1(X)$.

Esercizio 2. La bottiglia di Klein è una varietà topologica K che ammette un rivestimento doppio $T \to K$ del toro T. Mostra che non esistono rivestimenti $\mathbb{RP}^2 \to K$ e $K \to \mathbb{RP}^2$, dove $\mathbb{RP}^2$ è il piano proiettivo reale.

Esercizio 3. Sia $r \in (0, +\infty)$ e consideriamo il cammino $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Per i valori di r per cui è definito, calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{(z+1)(z-2)^2}\, dz.$$

Esercizio 4. Siano r una retta affine e C una circonferenza nel piano complesso. Mostra che esiste una funzione olomorfa, definita in un aperto contenente r, tale che $f(r) \subseteq C$.