TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Quarto scritto a.a. 05/06: 25 settembre 2006

Esercizio 1. Sia $GL^+(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante positivo, e $SL(n,\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici con determinante uguale a 1, entrambi con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$. Mostra che $SL(n,\mathbb{R})$ è un retratto di deformazione di $GL^+(n,\mathbb{R})$.

L'affermazione resta vera se si considera $GL(n,\mathbb{R})$ al posto di $GL^+(n,\mathbb{R})$?

Esercizio 2. Consideriamo il cubo n-dimensionale

$$C = [-1,1]^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_i| \leqslant 1 \ \forall i\} \subset \mathbb{R}^n$$

ed il suo bordo

$$\partial C = \{(x_1,\dots,x_n) \in C \mid |x_i| = 1 \text{ per qualche } i\}.$$

1. Mostra che ∂C è connesso per archi.
2. Calcola il gruppo fondamentale di ∂C.
3. Mostra che ∂C è una varietà topologica.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. Mostra che

$$f(z) = \frac{az+b}{z+n}$$

per qualche intero n.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = (\operatorname{Im} z)^2 + i \operatorname{Re}(e^z).$$

(1) Determina l'insieme dei punti di $\mathbb{C}$ in cui f è derivabile, e in tali punti calcola la derivata.

(2) Determina l'insieme dei punti di $\mathbb{C}$ in cui f è olomorfa.