CORSO DI TOPOLOGIA 2006

BRUNO MARTELLI

Si consiglia di svolgere gli esercizi nel momento in cui si presentano durante la lettura. Le parti (di teoria o esercizi) contrassegnate con ($\star$) sono invece facoltative (se di teoria) o più impegnative (se esercizi).

1. Topologia generale

1.1. **Spazio topologico.** Uno *spazio topologico* è una coppia $(X, \mathcal{T})$ in cui X è un insieme e $\mathcal{T}$ una collezione di sottoinsiemi di X, detti *aperti*, tali che:

- i sottoinsiemi $\emptyset$ e X sono aperti;
- l'unione di una quantità arbitraria di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di un insieme finito di aperti è un insieme aperto.

Una collezione $\mathcal{T}$ che soddisfa queste ipotesi è una *topologia* su X. Quando non è strettamente necessario, omettiamo $\mathcal{T}$ e chiamiamo più brevemente lo spazio topologico X invece di $(X, \mathcal{T})$.

Esempio 1.1. Sia X un insieme.

- $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X, detta *banale*;
- $P(X)$, dove $P(X)$ è l'insieme delle parti di X, è una topologia su X, detta *discreta*;
- $\{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è un insieme finito }\}$ è una topologia su X, detta *cofinita*.

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme fissato X. Diciamo che $\mathcal{T}$ è *più fine* di $\mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$, cioè se ogni aperto di $\mathcal{T}'$ è anche un aperto di $\mathcal{T}$. Le topologie discreta e banale sono rispettivamente la più fine e la meno fine di tutte.

Definizione 1.2. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

- Un insieme U contenente un punto $x \in X$, tale che esiste un aperto A con $x \in A \subset U$ è detto *intorno* di x.
- Un *sistema di intorni* per $x \in X$ è un insieme $\{U_i\}_{i \in I}$ di intorni[1] di x tale che ogni aperto U contenente x esiste $i \in I$ tale che $U_i \subset U$.
- Un *ricoprimento* di X è un insieme di sottoinsiemi di X, la cui unione è X. Un *ricoprimento aperto* è un ricoprimento fatto da aperti.

[1]Qui e altrove, I è un insieme di indici. Può essere infinito, anche non numerabile.

- Una *base* per la topologia $\mathcal{T}$ è un insieme di aperti $\{B_i\}_{i\in I}$ tale che ogni aperto di $\mathcal{T}$ è unione di alcuni di questi. Equivalentemente, una base è un ricoprimento aperto $\{B_i\}_{i\in I}$ tale che:

$$\forall x \in B_i \cap B_j \quad \exists k \in I \text{ tale che } x \in B_k \subset B_i \cap B_j, \quad \forall i,j \in I. \tag{1}$$

L'importanza delle basi sta nel fatto che determinano la topologia:

Proposizione 1.3. *Un ricoprimento $\{B_i\}$ che soddisfa la (1) è base di un'unica topologia, definita nel modo seguente: un insieme A è aperto se e solo se è unione di elementi della base.*

La proposizione seguente fornisce un criterio utile per dimostrare che un sottoinsieme è aperto.

Proposizione 1.4. *Sia X spazio topologico. Un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se e solo se ogni $x \in A$ ha un intorno aperto $U(x)$ contenuto in A.*

Dim. Se A è aperto, A è un intorno per ogni x. D'altra parte, se ogni x ha un intorno $U(x)$ aperto contenuto in A, l'insieme $A = \cup_{x\in A} U(x)$ è unione di aperti ed è quindi aperto. □

Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici è *continua* se la controimmagine $f^{-1}(U)$ di ogni aperto U di Y è un aperto di X. Una funzione biunivoca e continua, con inversa anch'essa continua, è un *omeomorfismo*.

Esercizio 1.5. La composizione $g \circ f : X \to Z$ di due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ è continua.

Definizione 1.6. Sia X uno spazio topologico ed $A \subset X$ un suo sottoinsieme.

- A è *chiuso* se il complementare $X \setminus A$ è aperto.
- La *chiusura* $\bar{A}$ di A è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono A.
- La *parte interna* $\dot{A}$ di A è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.
- A è *denso* in X se $\bar{A} = X$.
- La *frontiera* ∂A di A è $\partial A = \bar{A} \setminus \dot{A}$.
- A è *discreto* se ogni $x \in X$ ha un intorno $U(x)$ con $U(x) \setminus \{x\}$ disgiunto da A.

Esercizio 1.7. Sia X spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme. Allora $\bar{A}$ è chiuso e $\dot{A}$ è aperto. Inoltre:

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}, \qquad \dot{\dot{A}} = \dot{A}.$$

Esercizio 1.8. Un sottospazio $A \subset X$ discreto è chiuso.

Esercizio 1.9. Sia $f : X \to Y$ funzione fra spazi topologici.

- f è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è chiuso in X per ogni chiuso A in Y.
- Se f è costante allora è continua.
- Se X ha topologia banale e Y discreta, allora f è continua solo se è costante.
- Se X ha topologia discreta, allora f è continua.

1.2. **Costruzione di spazi topologici.** Analogamente a quanto accade per i gruppi, gli anelli e gli spazi vettoriali, esistono alcune operazioni “universali” che permettono di costruire dei nuovi spazi topologici a partire da alcuni spazi dati. È spesso conveniente tenere a mente diverse definizioni di questi spazi: sia quelle più teoriche mediante *proprietà universali*, che altre più concrete.

1.2.1. *Sottospazio.* Un qualsiasi sottoinsieme $Y \subset X$ di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ può essere dotato di una topologia, detta *indotta*, definita da una delle seguenti richieste equivalenti:

(1) la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono la mappa inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ continua;
(2) un sottoinsieme $A \subset Y$ è aperto se e solo se esiste un aperto A' di X tale che $A = A' \cap X$.
(3) un sottoinsieme $A \subset Y$ è chiuso se e solo se esiste un chiuso A' di X tale che $A = A' \cap X$.
(4) la topologia su X che soddisfa la seguente proprietà universale: una funzione $f : Z \to Y$ definita su uno spazio topologico Z è continua se e solo se lo è la composizione $i \circ f : Z \to X$.

Assegneremo sempre ad un sottospazio la topologia indotta, anche senza menzionarla.

Proposizione 1.10. *La restrizione di una funzione continua ad un sottospazio è continua.*

Dim. Sia $f : X \to Y$ funzione continua e $A \subset X$ sottospazio. Dato un aperto U di Y, dobbiamo mostrare che $(f|_A)^{-1}(U)$ è aperto in A. Sappiamo che $f^{-1}(U)$ è aperto in X. Quindi $f^{-1}(U) \cap A$ è aperto in A. D'altra parte

$$f^{-1}(U) \cap A = (f|_A)^{-1}(U)$$

e quindi $f|_A$ è continua. □

Esercizio 1.11. Sia X spazio topologico e $B \subset A \subset X$ sottospazi.

- Se A è chiuso, B è chiuso in A se e solo se lo è in X.
- Se A è aperto, B è aperto in A se e solo se lo è in X.
- Descrivere esempi in cui B è chiuso o aperto in A e non in X.

Il risultato seguente è molto utile per costruire funzioni continue come “incollamento” di funzioni continue definite su sottospazi.

Proposizione 1.12. *Siano X e Y spazi topologici. Siano A e B chiusi di X con $X = A \cup B$. Siano $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ due funzioni continue coincidenti su $A \cap B$. Allora la funzione $h : X \to Y$ definita da:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

è ben definita e continua.

Dim. La funzione h è ben definita perché le funzioni f e g coincidono sui punti di $A \cap B$. Per dimostrare che h è continua usiamo l'Esercizio 1.9, e mostriamo che $h^{-1}(C)$ è un chiuso in X per ogni chiuso C in Y.

Abbiamo $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Poiché f e g sono continue, $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ sono chiusi rispettivamente in A e in B, e quindi lo sono in X per l'Esercizio 1.11. La loro unione $h^{-1}(C)$ è quindi un chiuso in X. □

1.2.2. *Prodotto.* Dati due spazi topologici X e Y, il prodotto cartesiano $X \times Y$ può essere dotato di una topologia, detta *prodotto*, definita da una delle seguenti richieste equivalenti:

(1) la topologia meno fine fra tutte quelle che rendono le proiezioni sui due fattori continue;
(2) la topologia definita dalla base seguente:
$$\big\{U \times V \mid U \text{ aperto di } X,\ V \text{ aperto di } Y\big\}$$
(3) un sottoinsieme $A \subset X \times Y$ è aperto se e solo se $A = \cup_{i \in I}(U_i \times V_i)$, dove U_i e V_i sono aperti risp. in X e Y.
(4) la topologia che soddisfa la seguente proprietà universale: una funzione $f : Z \to X \times Y$ definita su uno spazio topologico Z è continua se e solo se lo sono entrambe le composizioni
$$\pi_X \circ f : Z \to X, \qquad \pi_Y \circ f : Z \to Y$$
con le proiezioni $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to X$.

Esercizio 1.13. Se $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ sono funzioni continue fra spazi topologici, allora la funzione
$$\begin{aligned} (f \times g) : X \times W &\to Y \times Z \\ (x, w) &\mapsto \big(f(x), g(w)\big) \end{aligned}$$
è continua.

1.2.3. *Quoziente.* Dato uno spazio topologico X ed una relazione di equivalenza $\sim$ in X, l'insieme quoziente $X/_\sim$ può essere dotato di una topologia, definita da una delle seguenti richieste equivalenti:

(1) la topologia più fine fra tutte quelle che rendono la proiezione $\pi : X \to X/_\sim$ continua;
(2) un sottoinsieme $A \subset X/_\sim$ è aperto se e solo se la sua controimmagine $\pi^{-1}(A)$ è aperta;
(3) la topologia che soddisfa la seguente proprietà universale: una funzione $f : X/_\sim \to Z$ a valori in uno spazio topologico Z è continua se e solo se lo è la composizione $f \circ \pi : X \to Z$ con la proiezione.

Il risultato seguente è molto utile per dimostrare che il quoziente di uno spazio topologico è omeomorfo ad un altro spazio.

Proposizione 1.14. *Sia $\pi : X \to X/_\sim$ un quoziente di uno spazio topologico X. Sia Y spazio topologico, e $f : X/_\sim \to Y$ una biezione. Se $F = f \circ \pi$ è continua, ed è anche aperta o chiusa, allora f è un omeomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/_\sim \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

1.3. **Assiomi di separazione.** Per dimostrare alcuni teoremi generali è necessario supporre che gli spazi topologici soddisfino qualche assioma. Tra quelli più usati troviamo i seguenti.

Definizione 1.15. Sia X uno spazio topologico.

- X è T_0 se per ogni $x, y \in X$ esiste un aperto che contiene x e non y, *oppure* viceversa. In altre parole, la topologia distingue i punti.
- X è T_1 se per ogni $x, y \in X$ esiste un aperto che contiene x e non y, *e* viceversa. In altre parole, per ogni x l'insieme $\{x\}$ è chiuso.
- X è T_2 o *di Hausdorff* se per ogni $x, y \in X$ esistono due aperti U e V disgiunti che contengono risp. x e y.

Proposizione 1.16. *Un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff. Il prodotto di due spazi di Hausdorff è di Hausdorff.*

1.4. **Compattezza.** Un *sottoricoprimento* di un ricoprimento $\{A_i\}$ di uno spazio X è una collezione di alcuni dei sottoinsiemi A_i, la cui unione è sempre X.

Definizione 1.17. Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Diciamo che un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è compatto se lo è con la topologia indotta.

Teorema 1.18. *Sia X uno spazio topologico.*

- *Se X è compatto e $A \subset X$ è chiuso, allora A è compatto.*
- *Se X è di Hausdorff e $A \subset X$ è compatto, allora A è chiuso.*

Teorema 1.19. *Siano X e Y spazi topologici.*

- *Se $f : X \to Y$ è continua e X è compatto, allora $f(X)$ è compatto.*
- *Ne segue che il quoziente di uno spazio compatto è compatto.*
- *Il prodotto $X \times Y$ è compatto se e solo se lo sono entrambi X e Y.*

Esercizio 1.20. Un sottoinsieme discreto di uno spazio compatto è finito.

1.5. **Connessione.**

Definizione 1.21. Uno spazio topologico X è *connesso* se non è l'unione disgiunta di due aperti non vuoti.

Diciamo che un sottoinsieme A di uno spazio topologico X è connesso se lo è con la topologia indotta.

Proposizione 1.22. *Sia X uno spazio topologico. L'unione di due sottoinsiemi connessi non disgiunti è un sottoinsieme connesso.*

Dim. [2] Siano U e V connessi con $U \cap V \neq \emptyset$. Sia $x \in U \cap V$. Supponiamo che $U \cup V = A \cup B$ dove A e B sono aperti disgiunti di $U \cup V$. Allora $A \cap U$ e $B \cap U$ sono aperti disgiunti di U, che ricoprono U. Poiché U è connesso, abbiamo $A \cap U = \emptyset$ e $B = U$, o viceversa. Lo stesso vale per V, e segue facilmente che $A = \emptyset$ e $B = U \cup V$, o viceversa. □

Teorema 1.23. *Siano X e Y spazi topologici.*

- *Se $f : X \to Y$ è continua e X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.*
- *Ne segue che il quoziente di uno spazio connesso è connesso.*
- *Il prodotto $X \times Y$ è connesso se e solo se lo sono entrambi X e Y.*

1.6. **Componenti connesse.** Dato uno spazio topologico X, definiamo una relazione $\sim$ su X nel modo seguente: $x \sim y$ se e solo se esiste un sottoinsieme connesso $A \subset X$ che contiene entrambi x e y.

Proposizione 1.24. *La $\sim$ è una relazione di equivalenza.*

Dim. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono facili. La transitiva è più delicata: se $x \sim y$ e $y \sim z$, esistono due connessi $A \supset \{x, y\}$ e $B \supset \{y, z\}$. Poiché $y \in A \cap B$, la Proposizione 1.22 implica che $A \cup B$ è connesso: quindi da $A \cup B \supset \{x, y, z\}$ segue che $x \sim z$. □

La relazione d'equivalenza induce su X una partizione in sottoinsiemi, detti *componenti connesse* di X.

Proposizione 1.25. *Un sottoinsieme di X è una componente connessa se e solo se è un connesso contenuto in nessun connesso strettamente più grande.*

Ogni componente connessa di X è chiusa.

Dim. La prima parte è un utile esercizio. Dimostriamo la seconda: sia x un punto esterno ad una componente connessa C. Mostriamo che esiste un intorno aperto $U(x)$ di x disgiunto da C: ne segue che C è chiuso.

[2] Questa dimostrazione apparentemente innocua contiene alcune insidie tipiche della topologia indotta: è importante ad ogni passo tenere a mente che gli aperti di U non sono necessariamente aperti in $U \cup V$, né tanto meno in X.

Per il primo punto, il sottospazio $C\cup\{x\}$ non è connesso. Quindi $C\cup\{x\}$ è unione di due aperti disgiunti. Poiché C è connesso, è facile vedere che gli aperti devono essere necessariamente C e $\{x\}$. Che $\{x\}$ sia aperto dentro $C\cup\{x\}$, vuol dire[3] che c'è un aperto $U(x)$ di X contenente x e disgiunto da C. $\square$

2. Spazi metrici

2.1. **Definizione.** Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una *distanza* su X, ovvero di una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, y) \geqslant 0\ \forall x, y \in X$, con $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Dato $x \in X$ e $r > 0$, chiamiamo la *palla* di raggio r intorno a x il sottoinsieme di X seguente:

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

Proposizione 2.1. *L'insieme di tutte le palle*

$$\{B_r(x) \mid r > 0,\ x \in X\}$$

è un ricoprimento di X che soddisfa la (1).

Dim. Sono chiaramente un ricoprimento, perché $x \in B_r(x)$ per un qualsiasi r. Dati $B_r(x)$ e $B_{r'}(x')$ con $y \in B_r(x) \cap B_{r'}(x')$, abbiamo $B_\epsilon(y) \subset B_r(x) \cap B_{r'}(x')$ per ϵ sufficientemente piccolo, grazie alla disuguaglianza triangolare: basta prendere $\epsilon \leqslant \min\big(r - d(y, x), r' - d(y, x')\big)$. $\square$

Uno spazio metrico è quindi in particolare anche uno spazio topologico: una base per la topologia è data dall'insieme di tutte le palle.

Proposizione 2.2. *Uno spazio metrico è di Hausdorff.*

Dim. Dati $x, y \in X$, le due palle $B_\epsilon(x)$ e $B_\epsilon(y)$ sono disgiunte per un qualsiasi $\epsilon < d(x, y)/2$, sempre per la disuguaglianza triangolare. $\square$

Il *diametro* di uno spazio metrico (X, d) è

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\big\{d(x, y) \bigm| x, y \in X\big\}.$$

Uno spazio metrico è *limitato* se ha diametro finito.

[3] Anche in questa dimostrazione si deve stare attenti a come la definizione di "aperto" dipenda dallo spazio in cui è considerato.

2.2. **Spazio euclideo.** Lo *spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$, dotato della *distanza euclidea*

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

è uno spazio metrico.

Teorema 2.3. *Il segmento* $[0,1]$ *è connesso e compatto.*

Teorema 2.4. *Un sottoinsieme* X *di* $\mathbb{R}^n$ *è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Tra i sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}^n$, che ereditano la topologia del sottospazio, troviamo:

$$\begin{aligned} D^n &= \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant 1\big\}, \\ B^n &= \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\big\}, \\ S^{n-1} &= \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\big\}. \end{aligned}$$

detti rispettivamente il *disco*, la *palla*, e la *sfera*.

Esercizio 2.5. La palla B^n e $\mathbb{R}^n$ sono omeomorfi, tramite la mappa

$$\begin{aligned} \psi : B^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \tan(|x|\pi/2)x \end{aligned}$$

Proposizione 2.6. *Gli spazi* D^n*,* B^n *e* S^{n-1} *sono connessi. Il disco e la sfera sono compatti.*

Lo spazio $\mathbb{C}^n$ eredita la topologia di $\mathbb{R}^{2n}$. Gli spazi proiettivi reale $\mathbb{RP}^n$ e complesso $\mathbb{CP}^n$ sono definiti come

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim, \qquad \mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$$

dove $v \sim v'$ se e solo se $v = \lambda v'$ per qualche scalare λ. Sono dotati della topologia quoziente.

Teorema 2.7. *Gli spazi* $\mathbb{RP}^n$ *e* $\mathbb{CP}^n$ *sono compatti e connessi per ogni* $n \geqslant 1$.

3. Archi

Un *arco* o *cammino* in uno spazio topologico X è una funzione continua $\alpha : [0,1] \to X$. Diciamo che l'arco *collega* i punti $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$, detti rispettivamente *di partenza* e *di arrivo* per α.

3.1. **Connessione per archi.** Uno spazio X è *connesso per archi* se per ogni coppia di punti in X esiste un arco che li collega. In altre parole, per ogni $x, y \in X$ esiste un arco $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Proposizione 3.1. *Ogni spazio topologico connesso per archi è connesso. Il sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^2$ definito da*

$$Z = \big\{(0,y)\big|\,|y| \leqslant 1\big\} \cup \big\{(x, \sin 1/x)\big|0 < x \leqslant 1\big\}$$

è connesso ma non connesso per archi.

Dim. Se X è connesso per archi, per ogni x, y in X esiste un arco $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. L'intervallo $[0,1]$ è connesso, e quindi la sua immagine $\alpha([0,1])$ è un connesso che contiene x e y: segue che $x \sim y$. Quindi X ha una sola componente connessa, cioè è connesso.

Consideriamo ora il sottospazio Z di $\mathbb{R}^2$ dato. Il sottospazio $Z \cap \{x > 0\}$ è connesso per archi perché è l'immagine della funzione continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}^2, f(x) = \sin(1/x)$ definita sul connesso per archi $(0,1]$. Anche $Z \cap \{x = 0\}$ è connesso per archi. Quindi Z ha una o due componenti connesse. Il connesso $Z \cap \{x > 0\}$ non è chiuso in Z: quindi non può essere una componente connessa per la Proposizione 1.25. Segue che Z è connesso.

D'altra parte, non è troppo difficile verificare che non esiste una funzione continua $f : [0,1] \to Z$ con $f(0) = (0,0)$ e $f(1) = (1/\pi, 0)$. Quindi Z non è connesso per archi. $\square$

3.2. **Operazioni con gli archi.** Sia X uno spazio topologico. L'*inverso* di un arco α è l'arco $\alpha'(t)$ definito da $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$. Quando questo non crea confusione con l'inversa di una funzione, l'inverso di un arco viene indicato con α^{-1}.

Siano α e β due archi in X con $\alpha(1) = \beta(0)$. Il *concatenamento* $\alpha * \beta$ di α e β è l'arco

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leqslant 1/2, \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \geqslant 1/2; \end{cases}$$

che è in effetti continuo per la Proposizione 1.12.

Esercizio 3.2. Abbiamo $(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$.

3.3. **Componenti connesse per archi.** Analogamente a quanto fatto sopra nella Sezione 1.5, possiamo definire una relazione $\sim$ su uno spazio topologico X nel modo seguente: $x \sim y$ se e solo se esiste un cammino che collega x e y.

Proposizione 3.3. *La $\sim$ è una relazione di equivalenza.*

Dim. $x \sim x$: la funzione costante $\alpha(t) = x\ \forall t \in [0,1]$ è continua, ed è quindi un cammino che collega x a se stesso.

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$: se esiste un cammino α che collega x e y, il cammino inverso α^{-1} collega y e x.

$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$: esistono due cammini α e β con $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(0) = y$ e $\beta(1) = z$. Il concatenamento $\alpha * \beta$ collega x a z. □

La relazione d'equivalenza induce quindi su X una partizione in sottoinsiemi, detti *componenti connesse per archi* di X. A differenza delle componenti connesse, le componenti connesse per archi non sono necessariamente chiuse.

Proposizione 3.4. *Un aperto di $\mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Dim. Sia X un aperto di $\mathbb{R}^n$. Mostriamo che ogni componente connessa per archi C di X è aperta. Prendiamo $x \in C$. Poiché X è aperto, esiste r tale che $B_r(x) \subset X$. Tutti i punti di $B_r(x)$ sono collegabili a x tramite archi: quindi $B_r(x) \subset C$. Quindi C è aperto per la Proposizione 1.4.

Se X è connesso, non può essere unione di aperti disgiunti non vuoti. Quindi può avere una sola componente connessa per archi: in altre parole, è connesso per archi. □

4. Categorie e funtori

Gli spazi topologici e le mappe continue sono oggetti molto complessi e difficili da studiare in modo diretto. Anche domande molto semplici, quali se $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ siano omeomorfi, risultano praticamente impossibili usando soltanto le definizioni.

Per questo si cerca di semplificare il problema "proiettando" (con una inevitabile perdita di informazioni) il "mondo" degli spazi topologici e delle mappe continue su un altro mondo più facile da studiare, come quello degli insiemi o dei gruppi. In matematica, i "mondi" e le loro "proiezioni" sono concetti definiti rigorosamente, chiamati "categorie" e "funtori".

4.1. **Categoria.** Una *categoria*[4] consiste di:

- una classe, i cui elementi sono insiemi (eventualmente dotati di strutture) chiamati *oggetti*;
- per ogni coppia ordinata (A, B) di oggetti, un insieme $\mathrm{Hom}(A, B)$ di funzioni da A a B chiamati *morfismi*.

Nella definizione si chiede che:

(1) $\mathrm{Hom}(A, A)$ contenga la funzione identità id_A, per ogni oggetto A;
(2) se $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ allora $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$.

Tra gli esempi più comuni di categorie troviamo:

- gli insiemi e le mappe fra questi;
- i gruppi e i loro omomorfismi;
- gli spazi vettoriali e le applicazioni lineari;
- gli spazi topologici e le funzioni continue.

[4] La definizione presente qui è un po' semplificata (e meno generale) rispetto a quella usuale.

4.2. **Funtore.** Un *funtore* è una mappa $F : C \to D$ fra due categorie, che associa:

- ad ogni oggetto X di C un oggetto $F(X)$ di D;
- ad ogni morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$;

in modo tale che:

(1) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni oggetto X in C;
(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ per ogni coppia di morfismi $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.

Per semplicità il morfismo $F(f)$ associato ad f è spesso indicato con f_*.

Osservazione 4.1. Normalmente un funtore definito in questo modo si chiama *covariante*, mentre un *funtore controvariante* associa ad un morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$. In questo corso vedremo solo funtori covarianti.

4.3. **Componenti connesse.** Costruitamo adesso un funtore dalla categoria degli spazi topologici in quella degli insiemi.

Dato uno spazio topologico X, indichiamo con $F(X)$ l'insieme delle sue componenti connesse. Una funzione continua $f : X \to Y$ fra spazi topologici induce una $f_* : F(X) \to F(Y)$ nel modo seguente: se C è una componente connessa di X, la sua immagine $f(C) \subset Y$ è connessa (per il Teorema 1.23) ed è quindi contenuta in una componente connessa $f_*(C)$ di Y.

La mappa F è un funtore dalla categoria degli spazi topologici in quella degli insiemi. Questo funtore un po' "rozzo" perde molte informazioni sugli spazi topologici. Nella prossima sezione definiremo un funtore molto più raffinato, che assocerà ad ogni spazio topologico un gruppo. Il funtore F ha comunque delle proprietà che permettono già di rispondere ad alcune domande.

Proposizione 4.2. *Se f è suriettiva anche f_* lo è.*

Dim. Sia $f : X \to Y$ e C una componente connessa di Y. Poiché f è suriettiva, esiste $x \in X$ con $f(x) \in C$ e quindi indicando con C_x la componente connessa di X contenente x, abbiamo $f(C_x) \subset C$, ovvero $f_*(C_x) = C$. □

Corollario 4.3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua suriettiva fra spazi topologici. Lo spazio Y non può avere più componenti connesse di X.*

Dim. Se f è suriettiva anche $f_* : F(X) \to F(Y)$ lo è e quindi $F(Y)$ non può avere cardinalità superiore a $F(X)$. □

Esercizio 4.4. Mostrare con esempi semplici che f iniettiva non implica in generale che f_* sia iniettiva.

4.4. **Definizioni generali ($\star$).** [5] Ci sono alcune costruzioni che si presentano in modo simile nelle varie categorie. Tra queste, i prodotti e i quozienti, che vengono fatti (quando possibile!) per spazi topologici, gruppi, spazi vettoriali, insiemi, etc.

[5] La presenza di questa sezione è soprattutto motivata dal fatto che ho imparato recentemente a disegnare diagrammi in LaTeX. :-)

Possiamo definire prodotti e quozienti una volta per tutte in una categoria astratta, nel modo seguente.

Sia C una categoria. Siano X e Y due oggetti di C. Un oggetto W e due morfismi $\pi_X : W \to X$ e $\pi_Y : W \to Y$ sono un *prodotto* di X e Y se soddisfano la seguente proprietà universale: dato un oggetto Z e due morfismi $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, esiste un unico morfismo $h : Z \to W$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& W \arrow[r, "\pi_Y"'] \arrow[d, "\pi_X"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Sia X un oggetto, e sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su X. Un oggetto Y ed un morfismo $\pi : X \to Y$ sono il *quoziente* di X per $\sim$ se soddisfano la seguente proprietà universale: dato un oggetto Z e un morfismo $g : X \to Z$ tale che $a \sim b \Rightarrow g(a) = g(b)$ per ogni a e b in X, allora esiste un unico morfismo $f : Y \to Z$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y \arrow[r, dotted, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Non è detto in generale che prodotti e quozienti esistano in una categoria. Vedremo nella Sezione 9 una costruzione, chiamata *prodotto amalgamato*, che è in un certo senso "duale" a quella di prodotto descritta qui.

5. Omotopia

5.1. **Definizione.** Siano X e Y due spazi topologici. Una *omotopia* fra due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ è una funzione continua

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ per ogni $x \in X$. Diciamo che l'omotopia F *collega* le funzioni f e g. Due funzioni f e g sono quindi *omotope* se c'è una omotopia che le collega.

Proposizione 5.1. *L'omotopia è una relazione d'equivalenza nell'insieme delle funzioni continue da X in Y.*

Dim. $f \sim f$: la funzione $F(x,t) = f(x)$ è continua (perché se U è aperto in Y, allora $F^{-1}(U) = f^{-1}(U) \times [0,1]$ è aperto in $X \times [0,1]$) e collega f a se stessa.

$f \sim g \Rightarrow g \sim f$: se $F(x,t)$ collega f e g, la funzione $G(x,t) = F(x,1-t)$ è continua (perché è composizione di F e di $j : X \times [0,1] \to X \times [0,1]$ data da $j(x,t) = j(x,1-t)$, che è continua) e collega g e f.

$f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$: se F e G collegano risp. f a g e g a h, la funzione

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{per } t \leqslant 1/2, \\ G(x,2t-1) & \text{per } t \geqslant 1/2; \end{cases}$$

è ben definita e continua per la Proposizione 1.12, e collega f a h. $\square$

Proposizione 5.2. *Se $f \sim f' : X \to Y$ e $g \sim g' : Y \to Z$, allora*

$$g \circ f \sim g' \circ f' : X \to Z.$$

Dim. Siano $F : X \times [0,1] \to Y$ e $G : Y \times [0,1] \to Z$ omotopie che legano risp. f a f' e g a g'. La mappa seguente

$$\begin{array}{rccc} H: & X \times [0,1] & \to & Z, \\ & (x,t) & \mapsto & G(F(x,t),t). \end{array}$$

lega $g \circ f$ a $g' \circ f'$, ed è continua, perché è composizione di G e della funzione $X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ data da $(x,t) \mapsto (F(x,t),t)$, che è continua perché lo è ciascuna delle sue due componenti. $\square$

L'affermazione seguente ci dice che il funtore F definito nella Sezione 4 non "vede" l'omotopia, cioè non distingue mappe omotope.

Proposizione 5.3. *Se $f, f' : X \to Y$ sono omotope allora inducono la stessa funzione $f_* = f'_* : F(X) \to F(Y)$.*

Dim. Sia F l'omotopia che collega f e f'. Per ogni $x_0 \in X$, le immagini $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ sono collegate dall'arco $t \mapsto F(x_0,t)$, e quindi appartengono alla stessa componente connessa. Quindi $f_* = f'_*$. $\square$

Proposizione 5.4. *Due funzioni $f, g : X \to C$ da uno spazio topologico X in un convesso $C \subset \mathbb{R}^n$ sono sempre omotope.*

Dim. L'omotopia $F : X \times [0,1] \to C$ è definita semplicemente come

$$F(x,t) = t \cdot f(x) + (1-t) \cdot g(x).$$

Il fatto che C sia convesso garantisce che la F abbia sempre valori in C. $\square$

5.2. **Spazi omotopicamente equivalenti.**

Definizione 5.5. Due spazi X e Y sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$.

Proposizione 5.6. *L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.*

Dim. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono ovvie. Dimostriamo la transitiva: abbiamo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend right, "f"'] & Y \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[r, bend right, "f'"'] & Z \arrow[l, bend right, "g'"'] \end{tikzcd}$$

e usando la Proposizione 5.2 vediamo che

$$g \circ g' \circ f' \circ f = g \circ (g' \circ f') \circ f \sim g \circ f \sim \mathrm{id}_X$$

e analogamente che $f' \circ f \circ g \circ g' \sim \mathrm{id}_Z$. $\square$

Uno spazio topologico X è *contrattile* se è omotopicamente equivalente al punto[6].

Proposizione 5.7. *Un convesso C in $\mathbb{R}^n$ è contrattile.*

Dim. Sia P il punto. Definiamo $f : C \to P$ come l'unica funzione possibile, e $g : P \to C$ come una funzione qualsiasi. Quindi $f \circ g : P \to P$ è l'identità, e $g \circ f : C \to C$ è omotopa all'identità per la Proposizione 5.4. $\square$

Corollario 5.8. *Gli spazi $\mathbb{R}^n$, D^n e B^n sono contrattili, per ogni n.*

Abbiamo già visto che il funtore F non distingue mappe omotope. Ne segue che non distingue spazi omotopicamente equivalenti:

Proposizione 5.9. *Se X e Y sono omotopicamente equivalenti allora $F(X)$ e $F(Y)$ hanno la stessa cardinalità.*

Dim. Per ipotesi esistono $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$. La Proposizione 5.3 quindi implica che le funzioni $f_* : F(X) \to F(Y)$ e $g_* : F(Y) \to F(X)$ sono una inversa dell'altra. $\square$

5.3. **Coppie di spazi.** Nella prossima sezione avremo bisogno di una generalizzazione del concetto di omotopia, per la quale valgono gli stessi enunciati elencati sopra.

Una *coppia di spazi topologici* è una coppia (X, A) dove X è uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme. Una *funzione* $f : (X, A) \to (Y, B)$ tra due coppie (X, A) e (Y, B) di spazi topologici è una $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$.

Esercizio 5.10. Le coppie di spazi topologici, con le loro funzioni, formano una categoria.

Una *omotopia* fra due funzioni $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ è una funzione

$$F : X \times [0, 1] \to Y$$

tale che

- $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in X$;
- $F(A, t) \subset B$ per ogni $t \in [0, 1]$.

[6] Il punto è lo spazio topologico formato da un punto solo.

Al solito, due funzioni f e g sono *omotope* se c'è una omotopia che le collega. Valgono le stesse proprietà descritte precedentemente: le dimostrazioni sono analoghe e lasciate per esercizio.

Esercizio 5.11. L'omotopia è una relazione d'equivalenza nell'insieme delle funzioni continue da (X, A) in (Y, B).

Esercizio 5.12. Se $f \sim f' : (X, A) \to (Y, B)$ e $g \sim g' : (Y, B) \to (Z, C)$, allora

$$g \circ f \sim g' \circ f' : (X, A) \to (Z, C).$$

6. Gruppo fondamentale

6.1. **Spazi puntati e lacci.** Uno *spazio topologico puntato* è una coppia (X, A) di spazi topologici in cui $A = \{x_0\}$ consta di un punto solo x_0, detto *punto base*. Lo spazio puntato si indica per semplicità come (X, x_0).

Per definizione, una funzione

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

fra spazi puntati è una funzione $f : X \to Y$ tale che $f(x_0) = y_0$. Gli spazi topologici puntati e le funzioni continue fra questi formano una categoria.

Un *laccio* in (X, x_0) è un arco che parte e arriva in x_0. Equivalentemente, è una funzione continua fra coppie di spazi topologici:

$$\alpha : \big([0, 1], \{0, 1\}\big) \to (X, x_0).$$

Seguendo la definizione data nella Sezione 5.3, una omotopia fra due lacci α e β è una $F : [0, 1] \times [0, 1]$ continua con

- $F(s, 0) = \alpha(s)$ e $F(s, 1) = \beta(s)$ per ogni $s \in [0, 1]$,
- $F(0, t) = F(1, t) = x_0$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Ricordiamo che l'inverso α^{-1} di un arco $t \mapsto \alpha(t)$ è l'arco $t \mapsto \alpha(1 - t)$. L'inverso di un laccio in (X, x_0) è quindi anch'esso un laccio. Inoltre due lacci α e β un (X, x_0) sono sempre concatenabili, ed il risultato $\alpha * \beta$ è un altro laccio in (X, x_0). Sia $\Omega_1(X, x_0)$ l'insieme dei lacci in X, dotato dell'operazione prodotto $*$. Vorremmo che questo insieme fosse un gruppo: purtroppo *nessuno* degli assiomi necessari è verificato! Risolviamo subito questo problema quozientando l'insieme $\Omega_1(X, x_0)$ tramite omotopia.

6.2. **Gruppo fondamentale.**

Definizione 6.1. Il *gruppo fondamentale* $\pi_1(X, x_0)$ di uno spazio topologico (X, x_0) con punto base è il quoziente

$$\Omega_1(X, x_0)/_\sim$$

dell'insieme dei lacci $\Omega_1(X, x_0)$ tramite la relazione $\sim$ d'omotopia.

L'insieme $\pi_1(X, x_0)$ risulta appunto essere un gruppo. L'operazione $*$ è quella data su $\Omega_1(X, x_0)$, che rimane ben definita anche nel quoziente grazie al risultato seguente.

Proposizione 6.2. *Se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ sono lacci in $\Omega_1(X, x_0)$, allora $\beta * \alpha \sim \beta' * \alpha'$.*

Dim. Siano $A : [0,1] \times [0,1] \to X$ e $B : [0,1] \times [0,1] \to X$ omotopie che collegano α a α' e β a β'. L'omotopia seguente collega $\beta * \alpha$ a $\beta' * \alpha'$:

$$\begin{array}{rccl} C: & [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} A(2s,t) & \text{per } s \leqslant 1/2, \\ B(2s-1,t) & \text{per } s \geqslant 1/2. \end{cases} \end{array}$$

□

Possiamo adesso dimostrare il fatto seguente.

Proposizione 6.3. $\big(\pi_1(X, x_0), *\big)$ *è un gruppo.*

Dim. Si devono dimostrare le proprietà seguenti:

associatività: Dati tre lacci α, β, γ, dobbiamo mostrare che $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ sono omotopi. Abbiamo:

$$\begin{array}{rccl} (\alpha * \beta) * \gamma : & [0,1] & \to & X \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \alpha(4s) & \text{per } s \leqslant 1/4, \\ \beta(4s-1) & \text{per } 1/4 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ \gamma(2s-1) & \text{per } s \geqslant 1/2. \end{cases} \\ \alpha * (\beta * \gamma) : & [0,1] & \to & X \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leqslant 1/2, \\ \beta(4s-2) & \text{per } 1/2 \leqslant s \leqslant 3/4, \\ \gamma(4s-3) & \text{per } s \geqslant 3/4. \end{cases} \end{array}$$

Una omotopia è data da:

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{2-t}\right) & \text{per } t \leqslant 2-4s, \\ \beta(4s-2+t) & \text{per } 2-4s \leqslant t \leqslant 3-4s, \\ \gamma\left(\frac{4s-4}{t+1}+1\right) & \text{per } t \geqslant 3-4s. \end{cases} \end{array}$$

Si veda Fig. 1: sia S l'unione del bordo del quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ e dei due segmenti storti contenuti in Q. Abbiamo $F(S) = x_0$, punto base di X.

elemento neutro: L'elemento neutro è dato dal laccio costante $\sigma(s) = x_0\ \forall s$. Dobbiamo far vedere che $\alpha * \sigma$, $\sigma * \alpha$ e α sono lacci omotopi. Un'omotopia tra $\alpha * \sigma$ e α è data da:

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ (s,t) & \mapsto & \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{2-t}\right) & \text{per } t \leqslant 2-2s, \\ x & \text{per } t \geqslant 2-2s. \end{cases} \end{array}$$

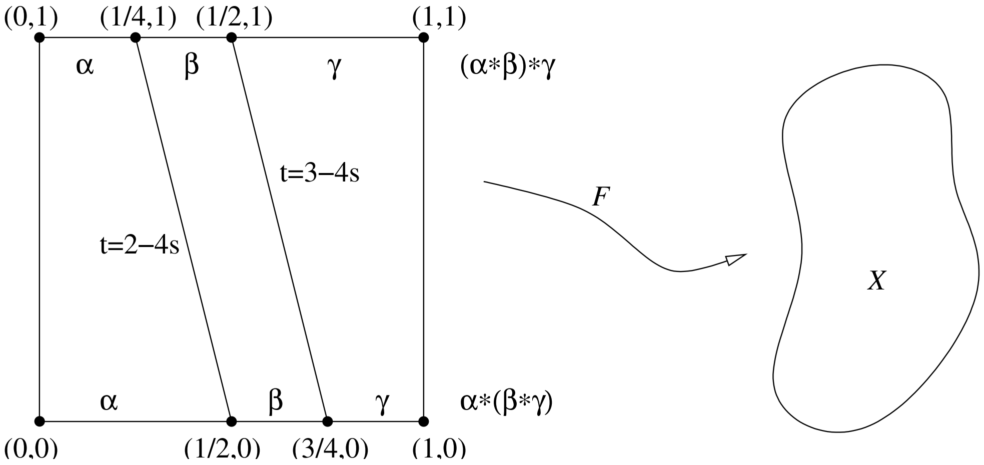

Figure 1: Schema per la dimostrazione della proprietà associativa.

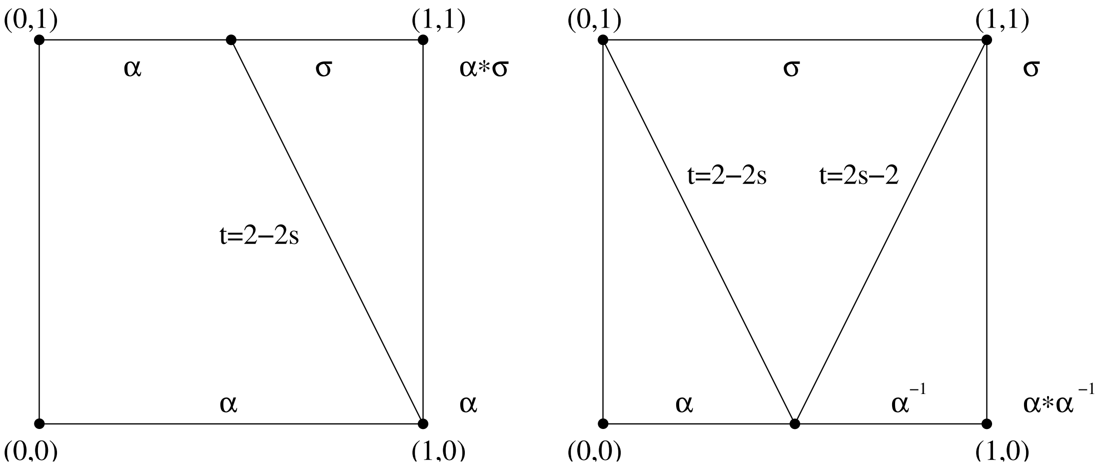

Figure 2: Schemi per la dimostrazione dell'esistenza dell'elemento neutro e dell'inversa.

Si veda Fig. 2-(sinistra). Si dimostra analogamente che $\sigma * \alpha$ è omotopo a α.

esistenza dell'inversa: Dato un laccio α, scriviamo α^{-1} il laccio $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$. Mostriamo che α^{-1} è l'inversa di α, cioè che $\alpha * \alpha^{-1}$, $\alpha^{-1} * \alpha$ e il laccio costante σ sono omotopi. Una omotopia tra $\alpha * \alpha^{-1}$ e σ è data da:

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] \times [0,1] & \to & X \\ (s,t) & \mapsto & \begin{cases} \alpha(2s) & \text{per } s \leqslant \frac{1-t}{2}, \\ \alpha(1-t) & \text{per } \frac{1-t}{2} \leqslant s \leqslant \frac{1+t}{2}, \\ \alpha(2-2s) & \text{per } s \geqslant \frac{1+t}{2}. \end{cases} \end{array}$$

Si veda Fig. 2-(destra). Una omotopia tra $\alpha^{-1} * \alpha$ e σ si costruisce in modo analogo.

Notiamo la differenza fra le prime due omotopie, in cui le varie α, β, γ vengono riscalate al variare di t (cioè viene cambiata la velocità di percorrenza del laccio), e l'ultima, in cui le velcità di α e α^{-1} rimangono alterate, ma i lacci vengono troncati. □

6.3. **Il gruppo fondamentale è un funtore.** Una mappa continua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce[7] una mappa $f_* : \Omega_1(X, x_0) \to \Omega_1(Y, y_0)$, che associa ad un laccio $\alpha : [0,1] \to X$ il laccio $f \circ \alpha : [0,1] \to Y$.

Proposizione 6.4. *La mappa f_* è ben definita al quoziente $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ed è un omomorfismo.*

Dim. Se $\alpha \sim \alpha'$ sono lacci omotopi, allora $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ per la Proposizione 5.2. Quindi f_* è ben definita. Abbiamo

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta), \quad f \circ \alpha^{-1} = (f \circ \alpha)^{-1}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \Omega_1(X, x_0)$: quindi f_* è un omomorfismo. □

Quindi π_1 è un funtore dalla categoria degli spazi puntati (con mappe continue) alla categoria dei gruppi (con omomorfismi): le due proprietà necessarie sono dimostrate facilmente.

6.4. **Dipendenza del punto base.** In molte situazioni, se lo spazio X è connesso per archi il punto base x_0 può essere ignorato, in virtù del risultato seguente:

Proposizione 6.5. *Se X è connesso per archi, $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_0')$ sono isomorfi per ogni x_0 e x_0' in X.*

Dim. Sia $\lambda : [0,1] \to X$ un arco che collega x_0 e x_0'. Definiamo una funzione

$$\psi : \Omega_1(X, x_0) \to \Omega_1(X, x_0')$$

nel modo seguente: se $\alpha \in \Omega_1(X, x_0)$, allora $\psi(\alpha)$ è il laccio definito come

$$\psi(\alpha) = \lambda * (\alpha * \lambda^{-1}).$$

[7]Ricordiamo che $f(x_0) = y_0$ per definizione.

Si veda la Fig. 3. Con le stesse tecniche della dimostrazione della Proposizione 6.3 si vede che ψ induce una mappa ben definita da $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(X, x_0')$, è un omomorfismo, ed è iniettiva e suriettiva[8]. $\square$

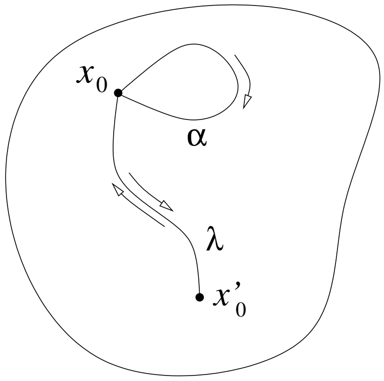

Figure 3: Il laccio $\phi(\alpha)$.

È importante notare che l'isomorfismo tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_0')$ non è canonico perché dipende dalla scelta dell'arco λ che collega i punti base.

D'ora in poi, se X è connesso per archi indichiamo con $\pi_1(X)$ il gruppo $\pi_1(X, x_0)$, visto che non dipende (a meno di isomorfismi) dalla scelta di $x_0 \in X$. Dobbiamo però ricordarci che senza fissare dei punti base non è possibile interpretare un elemento di $\pi_1(X)$ come una classe di lacci in X, né associare ad una mappa $f : X \to Y$ un omomorfismo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Uno spazio topologico X connesso per archi e avente $\pi_1(X)$ banale si dice *semplicemente connesso.*

Esercizio 6.6. Il punto è semplicemente connesso.

6.5. **Omotopia.** Abbiamo visto nella Sezione 5 che il funtore "componenti conesse" non distingue mappe omotope. Non lo fa neanche il funtore π_1. Per poter asserire con precisione questo fatto dobbiamo tenere conto dei punti base.

Teorema 6.7. *Siano $f \sim g : X \to Y$ due mappe omotope fra spazi topologici. Sia $x_0 \in X$ qualsiasi. Esiste un isomorfismo*

$$\psi : \pi_1\big(Y, f(x_0)\big) \to \pi_1\big(Y, g(x_0)\big)$$

che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1\big(Y, f(x_0)\big) \arrow[dd, dotted, "\psi"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1\big(Y, g(x_0)\big)
\end{tikzcd}$$

Dim. Sia $F : X \times [0,1]$ l'omotopia che collega f a g. Consideriamo l'arco $\lambda : t \mapsto F(x_0, t)$ in $X \times [0,1]$. La composizione $F \circ \lambda$ collega i punti base $f(x_0)$ e $g(x_0)$. Come

[8] Si consiglia di fare le verifiche per esercizio.

mostrato nella Proposizione 6.5, associando ad un laccio β in $(Y, f(x_0))$ il laccio

$$(F \circ \lambda)^{-1} * \big(\beta * (F \circ \lambda)\big)$$

in $(Y, g(x_0))$, otteniamo un isomorfismo $\psi : \pi_1\big(Y, f(x_0)\big) \to \pi_1\big(Y, g(x_0)\big)$.

Mostriamo che $g_* = \psi \circ f_*$. Sia α un laccio in (X, x_0): dobbiamo far vedere che

$$g \circ \alpha \sim (F \circ \lambda)^{-1} * \big((f \circ \alpha) * (F \circ \lambda)\big).$$

Per fare ciò, definiamo gli archi in $X \times [0, 1]$:

$$\alpha_0 : t \mapsto (\alpha(t), 0), \quad \alpha_1 : t \mapsto (\alpha(t), 1)$$

e notiamo che

$$\begin{aligned} (F \circ \lambda)^{-1} * \big((f \circ \alpha) * (F \circ \lambda)\big) &= F \circ \big(\lambda^{-1} * (\alpha_0 * \lambda)\big), \\ g \circ \alpha &= F \circ \alpha_1. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che i lacci α_1 e $\lambda^{-1} * (\alpha_0 * \lambda)$ in $(X \times [0, 1], (x_0, 1))$ sono omotopi. Segue quindi la tesi. □

Corollario 6.8. *Una equivalenza omotopica $f : X \to Y$ fra spazi topologici induce un isomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y, f(x_0)\big)$, per ogni x_0.*

Dim. Per ipotesi esiste $g : Y \to X$ con $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ e $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. Applicando la Proposizione precedente a $g \circ f : X \to X$ e id_X otteniamo che

$$(g \circ f)_* = \psi \circ \mathrm{id}_X : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(X, g(f(x_0))\big)$$

per un isomorfismo ψ. Poiché anche id_X è un isomorfismo, segue che $(g \circ f)_*$ è un isomorfismo. Quindi f_* è iniettiva. Procedendo analogamente con $f \circ g$ troviamo che f_* è suriettiva. □

Corollario 6.9. *Due spazi connessi per archi omotopicamente equivalenti hanno lo stesso gruppo fondamentale.*

Corollario 6.10. *Uno spazio contrattile è semplicemente connesso.*

Corollario 6.11. *Un convesso in $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Gli spazi $\mathbb{R}^n$, B^n e D^n sono semplicemente connessi, per ogni n.*

6.6. **Prodotti.** Concludiamo la sezione con il risultato seguente.

Proposizione 6.12. *Siano X e Y connessi per archi. Allora*

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Dim. Fissiamo dei punti base $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Siano $p^X : X \times Y \to X$ e $p^Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni. Definiamo quindi l'omomorfismo

$$\psi : \pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

come $\psi(\alpha) = \big(p_*^X(\alpha), p_*^Y(\alpha)\big)$. L'omomorfismo inverso ϕ si ottiene associando a due lacci α e β rispettivamente in (X, x_0) e (Y, y_0) il laccio

$$\phi(\alpha, \beta) : t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$$

in $(X \times Y, (x_0, y_0))$. □

7. Rivestimenti

7.1. **Definizione.** Sia $p : \tilde{X} \to X$ una funzione continua fra spazi topologici. Un aperto $U \subset X$ è *uniformemente rivestito* se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta[9] di aperti

$$p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} U_i$$

tali che $p|_{U_i} : U_i \to U$ è un omeomorfismo per ogni $i \in I$. L'insieme I è un insieme qualunque di indici, e può avere cardinalità arbitraria.

Definizione 7.1. Una funzione $p : \tilde{X} \to X$ continua fra spazi di Hausdorff e connessi per archi è un *rivestimento* se ogni $x \in X$ ha un intorno aperto $U(x)$ uniformemente rivestito.

Esercizio 7.2. Sia $p : \tilde{X} \to X$ una funzione continua fra spazi di Hausdorff connessi per archi.

- p è un rivestimento se e solo se esiste un ricoprimento di X fatto da aperti uniformemente rivestiti;
- p è un rivestimento se e solo se esiste una base di X fatta da aperti uniformemente rivestiti.

Esercizio 7.3. Le funzioni seguenti sono rivestimenti (dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e S^1 è visto dentro $\mathbb{C}$).

(1) $p : \mathbb{R} \to S^1, \quad p(x) = e^{ix}$;
(2) $p : S^1 \to S^1, \quad p(z) = z^n$, per ogni intero $n \geqslant 1$;
(3) $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad p(z) = z^n$, per ogni intero $n \geqslant 1$.

7.2. **Proprietà.**

Proposizione 7.4. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ha un intorno aperto $U = U(\tilde{x})$ tale che $p|_U : U \to p(U)$ è un omeomorfismo.*

Dim. Abbiamo $p^{-1}(p(x)) = \sqcup_{i \in I} U_i$ con $p|_{U_i} : U_i \to p(U_i)$ omeomorfismo per ogni i: basta prendere l'aperto U_i che contiene x. □

Proposizione 7.5. *Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è una mappa aperta.*

Dim. Per la proposizione precedente, esiste una base di aperti in $\tilde{X}$ le cui immagini tramite p sono tutti aperti. Questo implica facilmente che p è aperta. □

[9] Intendiamo che $U_i \cap U_j = \emptyset$ per ogni $i, j \in I$

Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. La *fibra* di un punto $x_0 \in X$ è la sua controimmagine $p^{-1}(x_0)$.

Proposizione 7.6. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Le fibre di due punti $x, x' \in X$ hanno la stessa cardinalità.*

Dim. Definiamo due punti di X equivalenti se le loro fibre hanno la stessa cardinalità. Questa relazione induce una partizione di X. Mostriamo che ogni insieme della partizione è aperto: dal fatto che X è connesso ne segue che la partizione è fatta di un insieme solo.

Sia $x \in X$ un punto, e $U(x)$ un suo intorno uniformemente rivestito. Abbiamo $p^{-1}(U(x)) = \sqcup_{i \in I} U_i$ e $p|_{U_i}$ omeomorfismo per ogni i. Segue che ogni punto di $U(x)$ ha fibra con cardinalità pari a quella di I. Quindi $U(x)$ è tutto contenuto nell'insieme della partizione contenente x. Quindi questi insiemi sono aperti. $\square$

Corollario 7.7. *Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è suriettivo.*

In virtù di questo risultato, chiamiamo il *numero di fogli* (o *grado*) di un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ la cardinalità della fibra di un qualsiasi punto di X.

Proposizione 7.8. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. La fibra di un punto è un sottoinsieme discreto di $\tilde{X}$.*

Dim. Sia $p^{-1}(x_0)$ la fibra di un punto $x_0 \in X$. Dobbiamo mostrare che ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ha un intorno aperto U tale che $\big(U \setminus \{\tilde{x}\}\big) \cap p^{-1}(x_0) = \emptyset$, cioè $x_0 \notin p\big(U \setminus \{\tilde{x}\}\big)$. Questo fatto segue facilmente dalla Proposizione 7.4. $\square$

Corollario 7.9. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Se $\tilde{X}$ è compatto, il numero dei fogli è finito.*

Dim. Un sottoinsieme discreto in un compatto è finito (Esercizio 1.20). $\square$

7.3. **Sollevamenti.** Dato un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ e due funzioni continue $f : Y \to X$ e $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ definite su uno spazio Y, diciamo che $\tilde{f}$ è il *sollevamento* di f se $f = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Lemma 7.10. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento e Y uno spazio connesso. Siano $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \to \tilde{X}$ due sollevamenti della stessa funzione $f : Y \to X$. Se $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$ per qualche y_0, allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.*

Dim. Mostriamo che l'insieme $S = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ dei punti su cui le due funzioni coincidono è aperto e chiuso. Dal fatto che contiene y_0 e che Y è connesso, ne seguirà che $S = Y$.

Chiusura: sia $y \notin S$. Allora $\tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)$. Poiché $\tilde{X}$ è di Hausdorff, ci sono due aperti disgiunti U e U' contenenti rispettivamente $\tilde{f}(y)$ e $\tilde{f}'(y)$. L'insieme $V(y) = \tilde{f}^{-1}(U) \cap \tilde{f}'^{-1}(U')$ è un intorno aperto di y. Sui punti in $V(y)$ le funzioni $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ non coincidono mai, e quindi $V(y) \cap S = \emptyset$. Segue che S è chiuso.

Apertura: sia $y \in S$. Sia $U \subset X$ un aperto uniformemente rivestito contenente $f(y)$. Quindi $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} U_i$, e sia U_{i_0} l'aperto contenente il punto $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$. Allora sull'aperto $f^{-1}(U)$ di Y abbiamo $\tilde{f} = (p|_{U_{i_0}})^{-1} \circ f = \tilde{f}'$ e quindi $f^{-1}(U) \subset S$. □

Un *automorfismo* di un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è un omeomorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tale che $p \circ f = p$. Un *punto fisso* per una funzione $f : Y \to Y$ è un punto y per cui $f(y) = y$.

Corollario 7.11. *Un automorfismo diverso dall'identità non ha punti fissi.*

Dim. Usiamo il lemma precedente con $Y = \tilde{X}$. L'identità $\mathrm{id} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ e $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ sono entrambi sollevamenti di $p : \tilde{X} \to X$. Quindi se coincidono in un punto coincidono ovunque. □

Esercizio 7.12. Gli automorfismi di un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ formano un gruppo.

Il prossimo enunciato dice che tutti i cammini α e le omotopie F su X possono essere sollevate su $\tilde{X}$ all'"altezza desiderata": si può chiedere cioè che il sollevamento passi per un punto a piacere nella fibra di $\alpha(0)$ o $F(0,0)$.

Teorema 7.13 (del sollevamento dei cammini e delle omotopie)**.** *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento.*

- *Per ogni arco $\alpha : [0,1] \to X$ e ogni $\tilde{x} \in p^{-1}\big(\alpha(0)\big)$ esiste un sollevamento $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ di α con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.*
- *Per ogni mappa continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ e ogni $\tilde{x} \in p^{-1}\big(F(0,0)\big)$ esiste un sollevamento $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ di F con $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}$.*

Dim. Sia α un arco in X. Dimostriamo che esistono $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tali che $\alpha\big([t_i, t_{i+1}]\big)$ sia contenuto in un aperto di X uniformemente rivestito, per ogni i.

Gli aperti uniformemente rivestiti di X formano un ricoprimento di X. La controimmagine rispetto a α di ciascuno di questi aperti è un aperto in $[0,1]$, unione di aperti connessi in $[0,1]$ (le sue componenti connesse). Tutti gli aperti connessi di $[0,1]$ che si ottengono in questo modo formano un ricoprimento per $[0,1]$. Poiché $[0,1]$ è compatto, esiste un sottoricoprimento finito. Possiamo supporre che questo sottoricoprimento sia minimale: cioè che ogni sottofamiglia di questa famiglia finita di aperti non sia un ricoprimento.

Un aperto connesso non vuoto in $[0,1]$ è un intervallo del tipo $[0,1]$, $[0,b)$, $(a,1]$ oppure (a,b). Poiché il ricoprimento è minimale, gli aperti sono dei segmenti

$$[0,b_0),(a_1,b_1),\ldots,(a_{k-2},b_{k-2}),(a_{k-1},1]$$

con $0<a_1<b_0<a_2<b_1<\ldots<b_{k-2}<1$. Prendendo un $t_i\in(a_i,b_{i-1})$ qualsiasi per $i=1,\ldots,k-1$ otteniamo una successione $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=1$ tale che $\alpha\big([t_i,t_{i+1}]\big)$ sia contenuto in un aperto di X uniformemente rivestito, per ogni i.

A questo punto definiamo $\tilde\alpha$ ricorsivamente su ogni segmento chiuso $[t_j,t_{j+1}]$, partendo da $j=0$. Sia U un intorno uniformemente rivestito contenente $\alpha\big([t_j,t_{j+1}]\big)$. Quindi $p^{-1}(U)=\sqcup_{i\in I}U_i$. Il punto $\tilde\alpha(t_j)$ è contenuto in un U_{i_0}. Definiamo quindi $\tilde\alpha$ su $[t_i,t_{i+1}]$ come $(p|_{U_{i_0}})^{-1}\circ\alpha$.

Il sollevamento di una $F:[0,1]\times[0,1]$ si effettua in modo analogo. Gli aperti uniformemente rivestiti sono un ricoprimento di X. La controimmagine di ciascuno di questi è un aperto di $[0,1]\times[0,1]$. Per definizione della topologia prodotto, un tale aperto è unione di rettangoli aperti in $[0,1]\times[0,1]$. La famiglia di tutti i rettangoli ottenuti in questo modo è un ricoprimento di $[0,1]\times[0,1]$. Ne estraiamo un sottoricoprimento finito. A questo punto è facile dimostrare che esiste un $N>0$ tale che il quadratino

$$Q_{k,h}=[k/N,(k+1)/N]\times[h/N,(h+1)N]$$

di area $1/N^2$ sia contenuto interamente in almeno uno di questi rettangoli, per ogni $k,h=0,\ldots,N-1$. Quindi l'immagine di ogni quadratino è contenuta in un aperto uniformemente ricoperto, e la $\tilde F$ può essere definita come sopra sui quadratini nell'ordine

$$Q_{0,0},Q_{0,1},\ldots,Q_{0,N-1},Q_{1,0},\ldots,Q_{N-1,N-1}.$$

□

Tali sollevamenti sono unici per il Lemma 7.10.

Corollario 7.14 (Teorema di monodromia)**.** *Sia $p:\tilde X\to X$ un rivestimento. Sia $x_0\in X$ un punto, e siano $\tilde\alpha$ e $\tilde\beta$ due archi in $\tilde X$, le cui proiezioni $\alpha=p\circ\tilde\alpha$ e $\beta=p\circ\tilde\beta$ sono lacci omotopi in (X,x_0)[10]. Allora $\tilde\alpha(0)=\tilde\beta(0)$ se e solo se $\tilde\alpha(1)=\tilde\beta(1)$.*

Dim. Supponiamo $\tilde\alpha(0)=\tilde\beta(0)$. Sia $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ l'omotopia che collega α e β. Questa si solleva ad una mappa $\tilde F:[0,1]\times[0,1]\to\tilde X$ tale che $\tilde F(0,0)=\tilde\alpha(0)=\tilde\beta(0)$.

Gli archi $s\mapsto\tilde F(0,s)$ e $s\mapsto\tilde F(1,s)$ hanno valori nella fibra di x_0, che è discreta: quindi sono entrambe costanti. Quindi $\tilde F(0,0)=\tilde F(1,0)=\tilde F(0,1)=\tilde F(1,1)$.

Gli archi $t\mapsto\tilde F(0,t)$ e $t\mapsto\tilde F(1,t)$ in $\tilde X$ sono sollevamenti rispettivamente di α e β, e partono entrambi da $\tilde\alpha(0)=\tilde\beta(0)$: per l'unicità del sollevamento deve essere

[10] cioè rappresentano lo stesso elemento in $\pi_1(X,x_0)$.

$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{F}(0,t)$ e $\tilde{\beta}(t) = \tilde{F}(1,t)$ per ogni t. Abbiamo visto che $\tilde{F}(0,1) = \tilde{F}(1,1)$, e quindi $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Invertendo $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ si deduce quindi anche che $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ implica $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. $\square$

7.4. **Rivestimenti e gruppo fondamentale.** Un *rivestimento* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ fra spazi puntati è semplicemente un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Proposizione 7.15. *Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento fra spazi puntati. L'omomorfismo $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettivo.*

Dim. Siano $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ due lacci in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ le cui proiezioni α e β sono omotope. Come nella dimostrazione del Corollario 7.14, l'omotopia F tra α e β si solleva ad una $\tilde{F}$ che risulta essere un'omotopia tra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. $\square$

Proposizione 7.16. *Il numero di fogli di un rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ è pari all'indice del sottogruppo $p_*\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ in $\pi_1(X, x_0)$.*

Dim. Dato un laccio α in (X, x_0), sia $\tilde{\alpha}$ il suo sollevamento in $\tilde{X}$ che parte da $\tilde{x}_0$. Il sollevamento non è necessariamente un laccio: il punto $\tilde{\alpha}(1)$ è nella fibra di x_0, ma può essere diverso da $\tilde{x}_0$. Abbiamo quindi una mappa

$$\phi : \Omega(X, x_0) \to p^{-1}(x_0).$$

data da $\phi(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$. Per il teorema di monodromia, ϕ è ben definita sul quoziente $\pi_1(X, x_0)$. Otteniamo quindi una funzione:

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0).$$

Consideriamo il sottogruppo $H = p_*\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ di $\pi_1(X, x_0)$. Ogni elemento di H è rappresentato da un laccio $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, proiezione di un laccio $\tilde{\alpha}$ in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Quindi il sollevamento del laccio α è ancora un laccio $\tilde{\alpha}$, e perciò $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$. Segue che $\phi(H) = \{\tilde{x}_0\}$.

Siano $C = \{Ha \mid a \in \pi_1(X, x_0)\}$ le classi laterali destre del sottogruppo $H = p_*\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$. L'argomento appena usato mostra anche che ϕ è costante su ciascuna classe laterale. Otteniamo quindi una funzione:

$$\phi : C \to p^{-1}(x_0)$$

e ci rimane da mostrare che è biiettiva. La suriettività è facile: dato $\tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$, esiste un arco λ che collega $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_0'$. Allora $\alpha = p \circ \lambda$ è un laccio in (X, x_0) tale che $\phi(\alpha) = \tilde{x}_0'$.

Mostriamo che ϕ è iniettiva: siano α e α' lacci con $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Allora $\tilde{\alpha} * \tilde{\alpha}'^{-1}$ è un laccio in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, e quindi $\alpha * \alpha'^{-1} \in H$. In altre parole, α e α' appartengono alla stessa classe laterale destra. $\square$

7.5. **Dipendenza dal punto base.** Come è nella filosofia del gruppo fondamentale, enunciamo dei risultati che ci permettono di svincolarci il più possibile dai punti base.

Proposizione 7.17. *Sia* $p : \tilde{X} \to X$ *un rivestimento. Siano* $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1$ *in* $\tilde{X}$ *e* $x_0 = p(\tilde{x}_0), x_1 = p(\tilde{x}_1)$ *in* X. *Esistono due isomorfismi* $\tilde{\psi}$ *e* ψ *che fanno commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "p"'] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\psi"'] & \pi_1(X, x_1) \end{tikzcd}$$

Proof. Sia $\tilde{\lambda}$ un arco in $\tilde{X}$ che collega $\tilde{x}_0$ con $\tilde{x}_1$. Siano $\tilde{\psi}$ e ψ gli isomorfismi costruiti nella dimostrazione della Proposizione 6.5) a partire dagli archi $\tilde{\lambda}$ e λ. A questo punto è facile verificare che il diagramma commuta. □

7.6. **Rivestimenti regolari.** Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è *regolare* se il sottogruppo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ è normale in $\pi_1(X, x_0)$, per una qualche scelta di $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, e con $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. La Proposizione 7.17 garantisce che la definizione non dipende dalla scelta di x_0.

In un rivestimento, sappiamo che il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di un laccio α non è necessariamente un laccio (cioè i suoi punti di partenza e di arrivo possono non coincidere). Può accadere addirittura che alcuni dei sollevamenti dello stesso α (effettuati con punti di partenza diversi) sono lacci, mentre altri no. Il prossimo esercizio dice che questo non accade se il rivestimento è regolare.

Esercizio 7.18. ($\star$) Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento regolare. Sia $x_0 \in X$, e α un laccio in (X, x_0). Siano $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}'$ due sollevamenti di α. Allora $\tilde{\alpha}$ è un laccio se e solo se $\tilde{\alpha}'$ lo è.

Uno spazio topologico Y è *localmente connesso per archi* se esiste una base per Y fatta di aperti connessi per archi. Tutti gli spazi "ragionevoli" sono localmente connessi per archi.

Teorema 7.19. *Sia* $p : \tilde{X} \to X$ *un rivestimento regolare, con* $\tilde{X}$ *localmente connesso per archi. Allora il gruppo degli automorfismi*[11] *di* p *è isomorfo al quoziente*

$$\pi_1(X, x_0)/_{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}$$

per ogni $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ *e* $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.

Dim. Sia G il gruppo degli automorfismi. Definisco una funzione

$$\phi : G \to \pi_1(X, x_0)/_{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}$$

[11] Si veda l'Esercizio 7.12

nel modo seguente. Dato $g \in G$, prendo un arco $\tilde{\lambda}$ qualsiasi in $\tilde{X}$ che collega $\tilde{x}_0$ e $g(\tilde{x}_0)$. La proiezione $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$ è un laccio in (X, x_0), poiché $p(g(\tilde{x}_0)) = p(\tilde{x}_0) = x_0$. Definisco $\phi(g)$ come la classe di λ in $\pi_1(X, x_0)/_{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))}$.

La definizione non dipende dalla scelta di $\tilde{\lambda}$: se $\tilde{\lambda}'$ è un altro arco che collega $\tilde{x}_0$ a $g(\tilde{x}_0)$, allora il concatenamento $\tilde{\lambda} * (\tilde{\lambda}')^{-1}$ dei due è un laccio in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, e quindi la sua proiezione $p \circ (\tilde{\lambda} * \tilde{\lambda}'^{-1}) = \lambda * \lambda'^{-1}$ vive nel sottogruppo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Quindi λ e λ' stanno nella stessa classe laterale di $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Mostriamo che ϕ è un omomorfismo. Siano g e g' due automorfismi. Siano $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\lambda}'$ archi che collegano $\tilde{x}_0$ rispettivamente a $g(\tilde{x}_0)$ e a $g'(\tilde{x}_0)$, e λ, λ' le loro proiezioni in X. Allora l'arco $g \circ \tilde{\lambda}'$ collega $g(\tilde{x}_0)$ a $(g \circ g')(\tilde{x}_0)$. Quindi l'arco concatenato $\tilde{\lambda} * (g \circ \tilde{\lambda}')$ collega x_0 a $(g \circ g')(\tilde{x}_0)$. La sua proiezione è $\lambda * \lambda'$. Segue quindi che $\phi(g \circ g') = \phi(g) * \phi(g')$ e quindi ϕ è un omomorfismo[12].

Mostriamo che ϕ è iniettiva. Sia $g \in G$ con $\phi(g) = 0$. Sia $\tilde{\lambda}$ che collega $\tilde{x}_0$ a $g(\tilde{x}_0)$. Per ipotesi, la proiezione λ è un laccio omotopo all'immagine α di un laccio $\tilde{\alpha}$ in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Il teorema di monodromia implica che anche $\tilde{\lambda}$ è un laccio, cioè che $g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Quindi x_0 è un punto fisso per l'automorfismo g, e ne segue (per il Corollario 7.11) che è l'identità.

Diamo infine un'idea su come dimostrare che ϕ è suriettiva. Dato un laccio α in (X, x_0), vogliamo costruire un automorfismo g tale che $\phi(g) = [\alpha]$. Dato un punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$, l'immagine $g(\tilde{x})$ è definita nel modo seguente: sia $\tilde{\lambda}$ un arco che collega $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$ e λ la sua proiezione in X. Definiamo come $g(\tilde{x})$ il punto di arrivo del sollevamento dell'arco $\alpha * \lambda$.

La funzione g è ben definita: se $\tilde{\lambda}'$ è un altro arco che collega $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$, allora $\tilde{\lambda}'^{-1} * \tilde{\lambda}$ è un laccio in $(\tilde{X}, \tilde{x})$, e l'Esercizio 7.18 implica che qualsiasi altro sollevamento di $\lambda'^{-1} * \lambda$ è un laccio: quindi i punti di arrivo dei sollevamenti di $\alpha * \lambda'$ e $\alpha * \lambda$ coincidono.

Infine, è facile vedere che g è biunivoca. Per dimostrare che è un omeomorfismo, si deve usare la locale connessione per archi. $\square$

Corollario 7.20. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento con $\tilde{X}$ semplicemente connesso e localmente connesso per archi. Allora $\pi_1(X)$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi di p.*

Proposizione 7.21. *Gli automorfismi del rivestimento $p : \mathbb{R} \to S^1$ dato da $p(x) = e^{ix}$ sono tutte e sole le traslazioni $\{x \mapsto x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

Dim. Ogni traslazione di questo tipo è un automorfismo. D'altra parte, un automorfismo g manda 0 in $2k\pi$ per qualche k, e quindi coincide nel punto 0 con la traslazione t di $2k\pi$: per il Corollario 7.11 l'automorfismo $g \circ t^{-1}$ è l'identità, e quindi $g = t$. $\square$

Corollario 7.22. *Abbiamo $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

[12] Si mostra analogamente che $\phi(g^{-1}) = \phi^{-1}(g)$: si consiglia di farlo per esercizio.

7.7. **Sollevamenti di mappe.** Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Il risultato seguente fornisce una condizione necessaria e sufficiente perché una mappa $f : Y \to X$ abbia un sollevamento.

Teorema 7.23. *Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento. Sia (Y, y_0) connesso per archi e localmente connesso per archi. Una funzione $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ha un sollevamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ se e solo se $Im\, f_* \subset Im\, p_*$. In altre parole:*

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\exists \tilde{f}"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, dotted, "\exists \tilde{f}_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd} \iff Im\, f_* \subset Im\, p_*.$$

Dim. Notiamo subito che, poiché p_* è iniettiva, le due ultime condizioni sono effettivamente equivalenti (esiste $\tilde{f}_*$ che solleva f_* se e solo se $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$). Inoltre, è chiaro che se esiste un sollevamento $\tilde{f}$, questo induce una $\tilde{f}_*$ che solleva f_* a livello di gruppi. Resta quindi da mostrare solo che la condizione algebrica $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$ implica l'esistenza del sollevamento topologico $\tilde{f}$.

Costruiamo quindi la mappa $\tilde{f}$ nel modo seguente: dato $y \in Y$, prendiamo un arco λ che collega y_0 a y. La composizione $f \circ \lambda$ è un arco in X che parte da x_0: sia $\widetilde{f \circ \lambda}$ il sollevamento di $f \circ \lambda$ che parte da $\tilde{x}_0$. Poniamo quindi $\tilde{f}(x) = \widetilde{f \circ \lambda}(1)$.

Mostriamo che f è ben definita. Sia λ' un altro arco da y_0 in y. Quindi $\lambda * \lambda'^{-1}$ è un laccio in (Y, y_0). Per ipotesi, la sua immagine $(f \circ \lambda) * (f \circ \lambda')^{-1}$ in (X, x_0) è omotopa ad un laccio α proiezione di un $\tilde{\alpha}$ in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Per il teorema di monodromia allora il sollevamento di $(f \circ \lambda) * (f \circ \lambda')^{-1}$ in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un laccio. Per l'unicità dei sollevamenti, si vede facilmente che $\widetilde{f \circ \lambda}(1) = \widetilde{f \circ \lambda'}(1)$.

Per dimostrare che f è continua, è necessaria l'ipotesi della locale connessione per archi. $\square$

Corollario 7.24. *Sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento e Y spazio semplicemente connesso e localmente connesso per archi. Ogni mappa $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ammette un sollevamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Corollario 7.25. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento con X localmente connesso per archi. Ogni aperto $U \subset X$ semplicemente connesso è uniformemente rivestito.*

Dim. Il sottospazio U è localmente connesso per archi, perché è aperto in uno spazio localmente connesso per archi[13]. Fissiamo un punto $x_0 \in U$. La funzione inclusione $i : (U, x_0) \to (X, x_0)$ soddisfa le ipotesi del corollario precedente. Quindi per ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, si solleva a $\tilde{i} : (U, x_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$. Sia $U(\tilde{x}) = \tilde{i}(U)$. Mostriamo che

[13] Si consiglia di dimostrare questo fatto generale per esercizio.

$p^{-1}(U) = \sqcup_{\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)} U(\tilde{x})$. L'inclusione $\supset$ è chiara. D'altra parte, se $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$, sia λ un arco che collega $p(\tilde{x})$ a x_0: il sollevamento $\tilde{\lambda}$ collega $\tilde{x}$ ad un punto $\tilde{x}_0$ della fibra di x_0 ed è necessariamente interamente contenuto in $U(\tilde{x}_0)$.

Infine, $p|_{U(\tilde{x})} : U(\tilde{x}) \to U$ è biiettiva, continua e aperta, quindi è un omeomorfismo per ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Quindi U è uniformemente rivestito. □

Esercizio 7.26. Sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento. Lo spazio X è localmente connesso per archi se e solo se $\tilde{X}$ lo è.

7.8. **Equivalenza ed esistenza di rivestimenti.** Due rivestimenti $p : \tilde{X} \to X$ e $p' : \tilde{X}' \to X$ sono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo $h : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ tale che $p = p' \circ h$.

Proposizione 7.27. *Sia X spazio topologico. A meno di equivalenza, esiste al più un solo rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ semplicemente connesso.*

Dim. Siano $p : \tilde{X} \to X$ e $p' : \tilde{X}' \to X$ due rivestimenti con $\tilde{X}$ e $\tilde{X}'$ semplicemente connessi. Prendiamo dei punti base in modo da avere dei rivestimenti $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ e $p' : (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$. La funzione p' si solleva per il Corollario 7.24 ad una funzione $\tilde{p}' : (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tale che $p \circ \tilde{p}' = p'$. Analogamente, p si solleva ad una funzione $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ tale che $p' \circ \tilde{p} = p$.

Quindi $\tilde{p}' \circ \tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ è un automorfismo del rivestimento p (infatti $p \circ \tilde{p}' \circ \tilde{p} = p' \circ \tilde{p} = p$) che fissa il punto $\tilde{x}_0$: per il Corollario 7.11 è l'identità. Lo stesso vale per $\tilde{p} \circ \tilde{p}'$, e quindi $\tilde{p}$ e $\tilde{p}'$ sono omeomorfismi che rendono i rivestimenti equivalenti. □

Corollario 7.28. *Sia X spazio topologico. Esiste al più uno spazio semplicemente connesso $\tilde{X}$ che riveste X.*

Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ semplicemente connesso è detto *rivestimento universale* di X. Tale rivestimento per X è unico per quanto appena detto; l'esistenza è garantita dal risultato seguente, se lo spazio X ha una struttura locale ragionevole. Uno spazio X è *localmente semplicemente connesso* se esiste una base di aperti semplicemente connessi.

Teorema 7.29. *Uno spazio X localmente semplicemente connesso e connesso per archi ha un rivestimento universale $p : \tilde{X} \to X$.*

Dim. ($\star$) Definiamo $\tilde{X}$ come

$$\tilde{X} = \cup_{x\in X} \pi_1(X, x)$$

e la mappa $p : \tilde{X} \to X$ imponendo che $p\big(\pi_1(X, x)\big) = x$. Definiamo quindi una topologia su $\tilde{X}$ nel modo seguente: dato $x_0 \in X$, sia $U(x_0)$ un intorno aperto semplicemente connesso. Per ogni $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ nella fibra di x_0, definiamo un aperto $U(\alpha)$ di $\tilde{X}$ che lo contiene nel modo seguente:

$$U(\alpha) = \cup_{x \in U(x_0)} \phi_x(\alpha)$$

dove $\phi_x : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x)$ è l'isomorfismo costruito come nella dimostrazione della Proposizione 6.5 a partire da un qualsiasi arco in $U(x_0)$ che collega x e x_0: tale ϕ_x non dipende dalla scelta dell'arco perché $U(x_0)$ è semplicemente connesso.

Tutti questi aperti, costruiti al variare di $x_0 \in X$, formano una base per una topologia su $\tilde{X}$, e si vede facilmente che p è un rivestimento. Si verifica inoltre che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso nel modo seguente: sia α un laccio in (X, x_0), dove x_0 è un punto base qualsiasi. La fibra di x_0 contiene un elemento privilegiato: l'elemento neutro e di $\pi_1(X, x_0)$. Si dimostra che il sollevamento $\tilde{\alpha}$ che parte da e arriva su $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Quindi il sollevamento di ogni laccio la cui classe è non banale in $\pi_1(X, x_0)$ non è un laccio. Quindi $\operatorname{Im} p_*$ è banale, e poiché p_* è iniettiva anche $\pi_1(\tilde{X}, e)$ lo è. □

Il risultato seguente (dato senza dimostrazione) generalizza il precedente e può essere utile in qualche esercizio.

Teorema 7.30. *Sia X uno spazio topologico localmente semplicemente connesso e connesso per archi. Sia $x_0 \in X$ un punto. Per ogni sottogruppo H di $\pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ tale che $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.*

7.9. **Esercizio ricapitolativo.** L'esercizio seguente è utile perché usa quasi tutti i fatti discussi in questa sezione.

Esercizio 7.31. Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi con rivestimento universale compatto. Mostrare che ogni funzione continua $f : X \to S^1$ è omotopa ad una costante.

Dim. Sia $p : \tilde{X} \to X$ il rivestimento universale. Poiché $\tilde{X}$ è compatto, p ha un numero finito di fogli (Corollario 7.9) e quindi $\pi_1(X)$ è finito (Proposizione 7.16). Fissiamo dei punti base, e scriviamo $f : (X, x_0) \to (S^1, y_0)$. La mappa $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$ è necessariamente banale, perché tutti gli elementi di $\pi_1(X, x_0)$ hanno torsione, mentre l'unico elemento che ha torsione in $\mathbb{Z}$ è lo zero. Quindi esiste un sollevamento $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ al rivestimento universale di S^1 (Teorema 7.23). La mappa $\tilde{f}$ è omotopa ad una mappa costante $c : X \to \mathbb{R}$ (Proposizione 5.4), e quindi $p \circ f$ è omotopa a $p \circ c$ (Proposizione 5.2), che è costante. □

7.10. **Omeomorfismi locali.** Concludiamo introducendo una nozione simile a quella di rivestimento, che è spesso più facile da verificare.

Definizione 7.32. Una funzione $f : X \to Y$ continua fra spazi topologici è un *omeomorfismo locale* in $x \in X$ se esistono due aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ contenenti rispettivamente x e $f(x)$, tali che $f|_U : U \to V$ sia un omeomorfismo.

La funzione f è un *omeomorfismo locale* se è tale in ogni punto $x \in X$.

Proposizione 7.33. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua.*

(1) *Se f è un rivestimento, allora è un omeomorfismo locale.*
(2) *Se f è un omeomorfismo locale, e la fibra $f^{-1}(x)$ ha cardinalità finita e non dipendente da x, allora f è un rivestimento.*

Dim. Il primo punto è facile: dato $x \in X$, l'immagine $f(x) \in Y$ è contenuta in un aperto V uniformemente rivestito: quindi esiste un aperto U contenente x tale che $f|_U : U \to V$ è un omeomorfismo.

Mostriamo il secondo punto. Dato un punto $y \in Y$, costruiamo un intorno di y uniformemente rivestito. Sia $\{x_1, \ldots, x_k\}$ la fibra di y. Per ipotesi, ogni x_i è contenuto in un aperto U_i tale che $f(U_i)$ è aperto in Y e $f|_{U_i} : U_i \to f(U_i)$ è un omeomorfismo. L'intersezione $V = f(U_1) \cap \ldots \cap f(U_k)$ è un aperto di Y contenente y. Consideriamo l'aperto $U_i' = U_i \cap f^{-1}(V)$ per ogni i. Mostriamo che $f^{-1}(V) = U_1' \cup \ldots U_k'$: per ipotesi, ogni punto di V ha k punti nella sua fibra, e ciascun U_i' ne contiene esattamente uno: quindi i due insiemi coincidono. Quindi V è uniformemente rivestito. □

Ricordiamo quindi l'enunciato seguente.

Teorema 7.34 (invertibilità locale)**.** *Sia $f : U \to V$ una funzione differenziabile tra due aperti U e V di $\mathbb{R}^n$. Se il Jacobiano di f è diverso da zero in un punto $x \in U$, allora f è un omeomorfismo locale in x.*

8. Prodotto libero

8.1. **Parole.** Sia S un insieme. Una *parola* p avente lettere in S è una successione finita (anche vuota) di elementi di S. Gli elementi di p sono *lettere*. La sua *lunghezza* $l(p)$ è il numero di lettere. Il *prodotto* (o *concatenamento*) di due parole $p = s_1 \ldots s_n$ e $p' = s_1' \ldots s_m'$ è la parola $p * p' = s_1 \ldots s_n s_1' \ldots s_m'$. Scriveremo per semplicità pp' invece di $p * p'$. Abbiamo ovviamente

$$l(pp') = l(p) + l(p').$$

Chiamiamo $\mathcal{P}(S)$ l'insieme di tutte le parole aventi lettere in S. Esiste un'unica parola di lunghezza zero (la successione vuota), e le parole di lunghezza uno vengono identificate in modo naturale con gli elementi di S.

8.2. **Prodotto libero.** Il prodotto libero $G * H$ fra due gruppi G e H è l'insieme

$$G * H = \mathcal{P}(G \cup H)/_\sim$$

dove $p \sim p'$ se e solo se p' è ottenibile da p tramite una sequenza finita di mosse di questo tipo:

(1) Sia $p = x_1 \ldots x_n$. Siano x_i e x_{i+1} entrambi elementi di G (oppure H), per qualche i. Sia $x = x_i \cdot x_{i+1}$ il prodotto di x_i e x_{i+1} in G (o H). Trasformiamo p nella parola:

$$x_1 \ldots x_{i-1} x x_{i+2} \ldots x_n$$

che ha una lettera in meno di p.

(2) Sia $p = x_1 \ldots x_n$. Se x_i è l'elemento neutro di G (o di H) per qualche i, rimuoviamo la lettera x_i da p, ottenendo:

$$x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n.$$

(3) L'inversa di una delle due mosse già descritte (quindi sostituire x con $x_1 x_2$ se $x = x_1 \cdot x_2$, e aggiungere elementi neutri a piacimento).

Proposizione 8.1. *L'operazione di concatenamento su $\mathcal{P}(G \cup H)$ resta ben definita in $G * H$, e con questa $G * H$ è un gruppo.*

Dim. Se $p_1 \sim p_2$ e $p_1' \sim p_2'$ allora p_2 e p_2' sono ottenuti con delle mosse da p_1 e p_1'. Quindi $p_2 p_2'$ è anch'egli ottenuto da $p_1 p_1'$ tramite mosse. Quindi l'operazione di concatenamento è ben definita al quoziente.

Dimostriamo ora che $G * H$ è un gruppo. La proprietà associativa è ovvia. L'elemento neutro è semplicemente la parola vuota. Resta l'esistenza dell'inversa: data una parola $p = a_1 \cdots a_k$, dove ogni a_i sta in G o in H, la sua inversa è $p^{-1} = a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$. Infatti

$$pp^{-1} = a_1 \cdots a_k a_k^{-1} \cdots a_1^{-1} \sim a_1 \cdots a_{k-1} a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} \sim \ldots \sim \emptyset$$

dove cancellando coppie adiacenti k volte si ottiene la parola vuota $\emptyset$. $\square$

La proposizione seguente può essere utile in molti casi concreti.

Proposizione 8.2. *Ogni elemento di $G * H$ si scrive in modo unico come parola* ridotta *$a_1 \ldots a_k$, dove:*

(1) *$a_{2i-1} \in G$ e $a_{2i} \in H$ per ogni i (oppure viceversa $a_{2i-1} \in H$ e $a_{2i} \in G$ per ogni i),*

(2) *nessun a_i è l'elemento neutro (di G o H).*

Dim. Se una parola p non è ridotta, può essere trasformata in una parola più corta tramite una delle due mosse. Quindi dopo un numero finito di mosse si ottiene necessariamente una parola ridotta (che può essere anche vuota). Non è difficile vedere che la parola ridotta ottenuta dipende solo da p (e non dalle mosse scelte). Inoltre se p' è ottenuto da p tramite una qualche mossa, è facile vedere che le ridotte di p' e p coincidono: quindi ogni classe di parole ha un solo rappresentante ridotto. $\square$

Per il corollario seguente, i gruppi G e H possono essere visti entrambi come sottogruppi di $G * H$.

Corollario 8.3. *Le mappe $i_G : G \hookrightarrow G * H$ e $i_H : H \hookrightarrow G * H$ che associano ad un elemento g in G o H la parola con una lettera g sono omomorfismi iniettivi.*

Esercizio 8.4. ($\star$) Il prodotto libero è una operazione commutativa ($G*H$ e $H*G$ sono isomorfi) e associativa $\big((G*H)*L$ e $G*(H*L)$ sono isomorfi$\big)$. Il gruppo banale è l'elemento neutro, cioè $G*\{e\}\cong\{e\}*G\cong G$. (Manca l'esistenza dell'inverso: i gruppi con l'operazione $*$ formano un *monoide*.)

8.3. **Gruppo libero.** Il *gruppo libero F_n di rango n* è quindi definito come[14]

$$F_n=\underbrace{\mathbb{Z}*\ldots*\mathbb{Z}}_{n}.$$

Osservazione 8.5. Consideriamo per semplicità il caso $n=2$: visto che F_2 non è abeliano (vedi Esercizio 8.6 sotto), abbandoniamo la scrittura additiva per $\mathbb{Z}$ e usiamo quella moltiplicativa. Scriviamo quindi gli elementi del "primo" $\mathbb{Z}$ come $\{\ldots,a^{-2},a^{-1},a^0,a^1,\ldots\}$ e gli elementi del "secondo" $\mathbb{Z}$ come $\{\ldots,b^{-2},b^{-1},b^0,b^1,\ldots\}$, e scriviamo le operazioni in entrambi i gruppi in modo moltiplicativo, cosí ad esempio abbiamo $a^3a^{-2}=a$ e $bb^2=b^3$.

Grazie alla Proposizione 8.2, ogni elemento di F_2 può essere scritto in modo unico come una parola p aventi lettere alternativamente del tipo a^i e b^j, con esponenti i e j sempre diversi da zero. Questi si moltiplicano e quindi si scrivono in forma ridotta nel modo ovvio: ad esempio moltiplicando a^2b^{-1} e b^1a^{-1} si ottiene $a^2b^{-1}b^1a^{-1}=a^2a^{-1}=a$.

Analogamente, ogni elemento di F_n si scrive in modo unico come parola ridotta aventi lettere in $\{a_1,\ldots,a_n\}$, ciascuna lettera con un esponente diverso da zero, e con lettere adiacenti sempre distinte.

Esercizio 8.6. Se G e H sono entrambi non banali allora $G*H$ contiene infiniti elementi e non è abeliano.

Esercizio 8.7. ($\star$) Dimostrare che $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}*\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ contiene un sottogruppo di indice 2 isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Concludiamo con una definizione algebrica che sarà utile in seguito. Sia G un gruppo e $S\subset G$ un sottoinsieme. Il *normalizzato* $N(S)$ di S è il sottogruppo generato da S e da tutti i coniugati degli elementi di S.

Esercizio 8.8. Il normalizzato $N(S)$ è il più piccolo sottogruppo normale fra quelli di G che contengono S.

9. Teorema di Van Kampen

9.1. **Prodotto amalgamato.** Siano $\sigma_1:H\to K_1$ e $\sigma_2:H\to K_2$ due omomorfismi tra gruppi. Il *prodotto* di K_1 e K_2 *amalgamato* su H è il dato di un gruppo K e di due omomorfismi $\alpha_1:K_1\to K$ e $\alpha_2:K_2\to K$ tali che:

- $\alpha_1\circ\sigma_1=\alpha_2\circ\sigma_2$;

[14] Per l'Esercizio 8.4 l'operazione "$*$" è associativa e quindi F_n è ben definito.

- (proprietà universale) per ogni gruppo G ed ogni coppia di omomorfismi $\beta_1 : K_1 \to G$ e $\beta_2 : K_2 \to G$ verificanti $\beta_1 \circ \sigma_1 = \beta_2 \circ \sigma_2$, esiste un unico omomorfismo $\beta : K \to G$ tale che $\beta_1 = \beta \circ \alpha_1$ e $\beta_2 = \beta \circ \alpha_2$.

La definizione risulta più chiara osservando il diagramma seguente.

(2)
$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] & & \\ H \arrow[ur, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & & K \arrow[r, dotted, "\beta"] & G \\ & K_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] \arrow[urr, bend right, "\beta_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposizione 9.1. *Il prodotto amalgamato esiste ed è unico a meno di isomorfismi*[15].

Dim. Esistenza $(\star)$[16]: definiamo K come

$$K = (K_1 * K_2)/_{N(S)}$$

dove

$$S = \left\{\sigma_1(h)\big(\sigma_2(h)\big)^{-1} \mid h \in H\right\}$$

è un insieme di parole da due lettere[17], e definiamo le mappe α_1 e α_2 come composizioni delle inclusioni naturali (vedi Corollario 8.3) in $K_1 * K_2$ con la proiezione su K:

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[d, hook, "i_1"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ K_1 * K_2 \arrow[r, "\pi"] & (K_1 * K_2)/_{N(S)} = K \\ K_2 \arrow[u, hook, "i_2"'] \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo $\alpha_1 \circ \sigma_1 = \alpha_2 \circ \sigma_2$, infatti per ogni $h \in H$ abbiamo

$$\big(\alpha_1 \circ \sigma_1(h)\big) \cdot \big(\alpha_2 \circ \sigma_2(h^{-1})\big) = \pi\big(\sigma_1(h)\big) \cdot \pi\Big(\big(\sigma_2(h)\big)^{-1}\Big) = \pi\Big(\sigma_1(h)\big(\sigma_2(h)\big)^{-1}\Big) = e.$$

Verifichiamo adesso che K soddisfa le ipotesi. Siano dati G, β_1, β_2 che rendono il diagramma (2) commutativo: costruiamo una β come richiesto, e mostriamo quindi che è unica.

---

[15]Intendiamo che se K' con $\alpha_1' : K_1 \to K'$ e $\alpha_2' : K_2 \to K'$ è un altro prodotto amalgamato, allora c'è un isomorfismo di gruppi $\phi : K \to K'$ tale che $\alpha_1' = \phi \circ \alpha_1$ e $\alpha_2' = \phi \circ \alpha_2$.

[16]La dimostrazione dell'esistenza è scritta qui per completezza, ma non ne avremo effettivamente bisogno.

[17]la prima lettera è $\sigma_1(h) \in K_1$, la seconda è $\big(\sigma_2(h)\big)^{-1} \in K_2$.

Ogni elemento di $K_1 * K_2$ è scrivibile come una parola $p = x_1 \ldots x_n$, dove $x_i \in K_{\nu(i)}$ con $\nu(i) \in \{1, 2\}$ per ogni i. Definiamo quindi

$$\beta(p) = \beta_{\nu(1)}(x_1) \cdots \beta_{\nu(n)}(x_n). \tag{3}$$

Cambiando p tramite le mosse descritte nella Sezione 8.2, l'immagine $\beta(p)$ non cambia: quindi β è ben definita su $K_1 * K_2$. Notiamo inoltre che se $p \in S$ allora

$$\beta(p) = \beta\big(\sigma_1(h)\sigma_2^{-1}(h)\big) = \beta_1\big(\sigma_1(h)\big) \cdot \beta_2\big(\sigma_2(h)\big)^{-1} = \beta_2\big(\sigma_2(h)\big) \cdot \beta_2\big(\sigma_2(h)\big)^{-1} = e.$$

Quindi $\ker \beta \supset N(S)$ e β è ben definita sul quoziente K.

Abbiamo finalmente costruito $\beta : K \to G$. D'altra parte, si vede facilmente che per una β che fa commutare il diagramma (2) deve necessariamente valere (3), e che quindi tale β è unica.

Unicità: Supponiamo di avere due prodotti amalgamati (K, α_1, α_2) e $(K', \alpha'_1, \alpha'_2)$. Usando la definizione di K con $G = K'$ e viceversa troviamo che esistono e sono uniche due $\alpha : K \to K'$ e $\alpha' : K' \to K$ che fanno commutare tutto il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
& K_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'_1"] \arrow[drrr, bend left, "\alpha_1"] & & & \\
H \arrow[ur, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & & K \arrow[r, dashed, "\alpha"] & K' \arrow[r, dashed, "\alpha'"] & K \\
& K_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] \arrow[urr, bend right, "\alpha'_2"] \arrow[urrr, bend right, "\alpha_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Inoltre, usando la definizione di K con $G = K$, vediamo che $\alpha' \circ \alpha : K \to K$ deve essere l'identità, e analogamente $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_{K'}$. Quindi α è un isomorfismo tra i prodotti amalgamati K e K'. $\square$

Il gruppo K ottenuto con il prodotto amalgamato viene indicato come

$$K = K_1 *_H K_2.$$

È importante ricordare che il gruppo K dipende anche dagli omomorfismi σ_1 e σ_2.

Proposizione 9.2. *Sia $K = K_1 *_H K_2$.*

(1) *Se K_1 e K_2 sono banali, anche K è banale.*
(2) *Se K_1 è banale, $K \cong K_2/_{N(Im\,\sigma_2)}$.*
(3) *Se H è banale, $K \cong K_1 * K_2$.*

Dim. Mostriamo il secondo punto, che implica anche il primo. Verifichiamo che $K = K_2/_{N(\mathrm{Im}\,\sigma_2)}$ e la proiezione $\alpha_2 : K_2 \to K$ soddisfano la proprietà universale. Siano G, β_1 e β_2 come nel diagramma (2). Definiamo $\beta : K \to G$ nel modo seguente: $\beta(k) = \beta_2(k_2)$ dove k_2 è un qualsiasi elemento di K_2 che si proietta su k. Mostriamo che la mappa è ben definita. Ogni altro elemento che si proietta su k è del tipo $k_2 l$ con $l \in N(\mathrm{Im}\,\sigma_2)$. D'altra parte $\beta_2 \circ \sigma_2 = \beta_1 \circ \sigma_1$ è necessariamente la mappa nulla (perché K_1 è banale), e quindi $\operatorname{Ker}\sigma_2$ contiene $N(\operatorname{Im}\beta_2)$. Segue che $\beta_2(l) = e$ e quindi $\beta_2(k_2 l) = \beta_2(k_2)$. Infine, tale β è unica perché α_2 è suriettiva.

Mostriamo il terzo punto allo stesso modo. Le mappe α_1 e α_2 sono le inclusioni naturali (vedi Corollario 8.3). Definiamo $\beta : K_1 * K_2 \to G$ nel modo seguente: se $p \in K_1 * K_2$ è una parola $x_1 \dots x_n$, dove la lettera x_i sta nel gruppo $K_{\nu(i)}$, poniamo $\beta(p) = \beta_{\nu(1)}(x_1) \cdots \beta_{\nu(n)}(x_n)$. Si vede facilmente che $\beta(p)$ non cambia se modifichiamo p con delle mosse, quindi β è ben definita. Si verifica che fa commutare il diagramma, e che la condizione usata nella definizione è in realtà necessaria. $\square$

9.2. **Teorema di Van Kampen.** Il teorema seguente è uno strumento molto potente per calcolare il gruppo fondamentale di molti spazi topologici.

Teorema 9.3. *Sia X uno spazio topologico. Siano X_1 e X_2 aperti connessi per archi di X, tali che $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2$ sia connesso per archi. Sia $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Allora $\pi_1(X, x_0)$ è il prodotto amalgamato di $\pi_1(X_1, x_0)$ e $\pi_1(X_2, x_0)$ su $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ tramite i morfismi associati alle inclusioni.*

(4)
$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_*"] & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Dim. Sia G un gruppo e β_1, β_2 dei morfismi che fanno commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_*"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\beta"] & G \\
& \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_*"'] \arrow[urr, bend right, "\beta_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostriamo che esiste ed è unico un morfismo β. Sia α un laccio in (X, x_0). Come nella dimostrazione del primo punto del Teorema 7.13, si trovano $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ tali che $\alpha(t_i) \in X_1 \cap X_2$ e $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ sia contenuto interamente in $X_{\nu(i)}$ per qualche $\nu(i) \in \{1, 2\}$, per ogni i. Poiché X_1 e X_2 sono connessi per archi, esiste per ogni i un arco λ_i che collega x_0 a $\alpha(t_i)$, interamente contenuto in $X_{\nu(i)}$ (come in Fig. 4). Consideriamo il laccio in $(X_{\nu(i)}, x_0)$ dato da

$$\alpha_i = \lambda_i * \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]} * \lambda_{i+1}^{-1}.$$

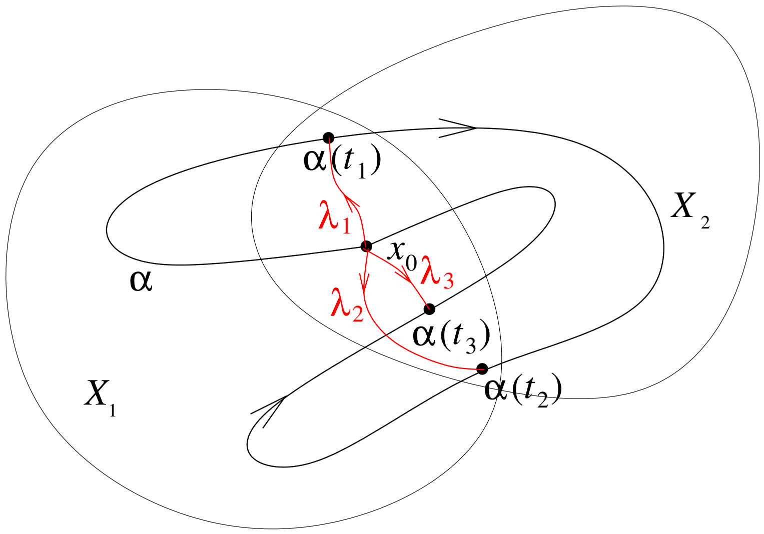

Figure 4: Ogni laccio α è omotopo ad un laccio $\alpha_1 * \ldots * \alpha_k$ dove ogni α_i sta in U o in V, costruito in questo modo.

Si vede facilmente che

$$\alpha \sim \alpha_1 * \ldots * \alpha_k$$

Ogni α_i rappresenta un elemento di $\pi_1(X_{\nu(i)}, x_0)$. La commutatività del diagramma impone che

$$\beta(\alpha) = \beta_{\nu(1)}(\alpha_1) \cdots \beta_{\nu(k)}(\alpha_k) \tag{5}$$

e quindi β è certamente unica. Per dimostrarne l'esistenza, definiamo β tramite (5): resta da verificare che non dipende dalle scelte fatte, che sono molte:

- scelta dei λ_i;
- scelta di $\nu(i) \in \{1,2\}$ nel caso in cui α_i sia contenuto in entrambi X_1 e X_2;
- scelta della partizione $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$ del segmento;
- scelta di α nella sua classe di omotopia.

Iniziamo con la scelta dei λ_i. Se prendiamo λ_i' invece di λ_i per qualche i, otteniamo α_i' e α_{i+1}' al posto di α_i e α_{i+1}. Sia γ il laccio $\lambda_i * \lambda_i'^{-1}$ in $(X_1 \cap X_2, x_0)$. Si vede facilmente che

$$\alpha_i' \sim \alpha_i * \gamma \text{ in } (X_{\nu(i)}, x_0), \quad \alpha_{i+1}' \sim \gamma^{-1} * \alpha_{i+1} \text{ in } (X_{\nu(i+1)}, x_0).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \beta_{\nu(i)}(\alpha_i') \cdot \beta_{\nu(i+1)}(\alpha_{i+1}') &= \beta_{\nu(i)}(\alpha_i) \cdot \beta_{\nu(i)}(\gamma) \cdot \beta_{\nu(i+1)}(\gamma^{-1}) \cdot \beta_{\nu(i+1)}(\alpha_{i+1}) \\ &= \beta_{\nu(i)}(\alpha_i) \cdot \beta_{\nu(i+1)}(\alpha_{i+1}). \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza, usiamo che γ è un laccio in $(X_1 \cap X_2, x_0)$, e quindi $\beta_1(\gamma) = \beta_2(\gamma)$.

Consideriamo la scelta di $\nu(i)$. Se α_i è contenuto sia in X_1 che in X_2, è un laccio in $(X_1 \cap X_2, x_0)$ e quindi $\beta_1(\alpha_i) = \beta_2(\alpha_i)$ per ipotesi.

Consideriamo ora la scelta della partizione $0 = t_1 < \ldots < t_{k+1} = 1$. Mostriamo che la funzione β non cambia se aggiungiamo alla partizione un valore $\bar{t}$ tra t_i e t_{i+1} con $\alpha(\bar{t}) = X_1 \cap X_2$, per qualche i. Questo è sufficiente, perché date due partizioni qualsiasi, l'unione di queste è ottenuta da ciascuna aggiungendo un numero finito di singoli elementi.

Abbiamo quindi $0 = t_1 < \ldots < t_i < \bar{t} < t_{i+1} < \ldots < t_{k+1} = 1$. Prendiamo quindi un arco λ in $X_1 \cap X_2$ che collega x_0 a $\alpha(\bar{t})$, ed i lacci

$$\alpha_i' = \lambda_i * \alpha|_{[t_i,\bar{t}]} * \lambda^{-1}, \qquad \alpha_i'' = \lambda * \alpha|_{[\bar{t},t_{i+1}]} * \lambda_{i+1}^{-1}$$

in $(X_{\nu(i)}, x_0)$. Poiché $\alpha_i' * \alpha_i'' \sim \alpha_i$, otteniamo

$$\beta_{\nu(i)}(\alpha_i')\beta_{\nu(i)}(\alpha_i'') = \beta_{\nu(i)}(\alpha_i)$$

e quindi β non cambia.

Resta da vedere cosa succede se prendiamo un laccio $\alpha' \sim \alpha$. Sia $F : [0,1]\times[0,1] \to X$ l'omotopia che lega i due lacci. Come nella dimostrazione del secondo punto del Teorema 7.13, si mostra che esiste $N > 0$ tale che il quadratino

$$[k/N, (k+1)/N] \times [h/N, (h+1)N]$$

di area $1/N^2$ sia contenuto interamente in X_1 oppure X_2, per ogni $k, h = 0, \ldots, N-1$.

Usiamo la partizione $0, 1/N, 2/N, \ldots, (N-1)/N, 1$ per entrambi i lacci α e α' per definire β. Mostriamo che le due definizioni coincidono trasformando α in α' un passo alla volta, come suggerito in Fig. 5. Nel passo mostrato in figura, vengono modificati due lacci α_i, α_{i+1} della suddivisione in due altri lacci α_i', α_{i+1}'. Tutti e quattro i lacci sono contenuti nello stesso aperto X_1 o X_2, e componendo F con l'omotopia data dal quadratino che li contiene otteniamo facilmente che $\alpha_i * \alpha_{i+1} \sim \alpha_i' * \alpha_{i+1}'$.

□

9.3. **Applicazioni.**

Corollario 9.4. *Sia $X = U \cup V$ unione di due aperti U e V semplicemente connessi con intersezione $U \cap V$ connessa per archi. Lo spazio X è semplicemente connesso.*

Proof. Segue dalla Proposizione 9.2-(1). □

Corollario 9.5. *La sfera S^n è semplicemente connessa per ogni $n \geqslant 2$.*

Dim. Consideriamo i punti $N = (1, 0, \ldots, 0)$ e $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ di S^n. La sfera è unione degli aperti $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$. La *proiezione stereografica*

$$\begin{array}{rcl} p : U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \left(\dfrac{x_2}{1-x_1}, \ldots, \dfrac{x_{n+1}}{1-x_1} \right) \end{array}$$

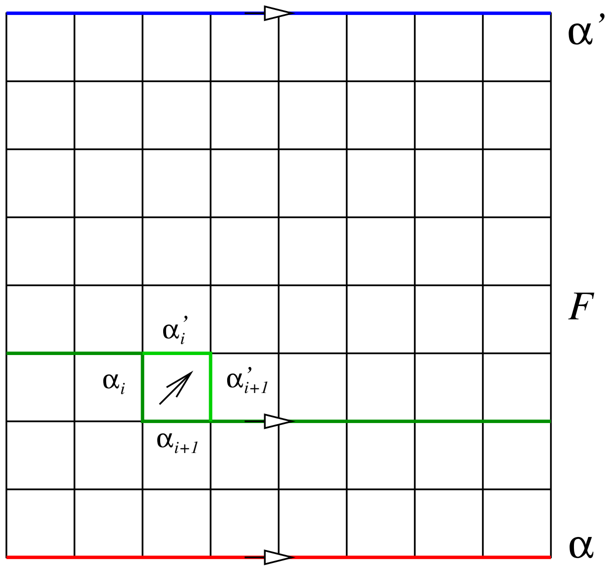

Figure 5: Scomponiamo l'omotopia tra α e α' in N^2 mosse di questo tipo.

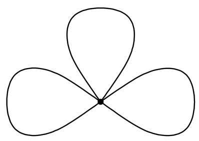

Figure 6: Il bouquet di 3 circonferenze.

è un omeomorfismo da U su $\mathbb{R}^n$. Quindi U e V sono semplicemente connessi. L'intersezione $U \cap V$ è connessa per archi se $n \geqslant 2$. Il Corollario 9.4 implica che S^n è semplicemente connesso per ogni $n \geqslant 2$. $\square$

Definizione 9.6. Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme. Lo spazio topologico $X/_A$ ottenuto *collassando* A è il quoziente $X/_A = X/_\sim$, dove $x \sim x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $x, x' \in A$.

Definizione 9.7. Il *bouquet di n circonferenze* è lo spazio topologico $(X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n)/\{x_1, \ldots, x_n\}$ dove $X_i \cong S^1$ e x_i è un punto qualsiasi di X_i, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Il bouquet di 3 circonferenze è mostrato in Fig. 6.

Proposizione 9.8. *Il gruppo fondamentale del bouquet di n circonferenze è il gruppo libero F_n con n elementi.*

Dim. Dimostriamo il fatto per induzione su n. Per $n = 1$ lo spazio è omeomorfo a S^1, che ha gruppo fondamentale $F_1 \cong \mathbb{Z}$. Il bouquet di n circonferenze è unione di due sottoinsiemi $X = X_1 \cup X_2$, dove X_1 è omeomorfo al bouquet con $n-1$ circonferenze, $X_2 \cong S^1$, e l'intersezione $X_1 \cap X_2$ è un punto. Se potessimo usare Van Kampen con questi insiemi, otterremmo dalla Proposizione 9.2-(3) che $\pi_1(X) \cong F_{n-1} * \mathbb{Z} \cong F_n$. Purtroppo questi insiemi non sono aperti: scegliamo quindi degli aperti $U_1 \supset X_1$ e $U_2 \supset X_2$ tali che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ abbiano gli stessi π_1 di X_1, X_2 e $X_1 \cap X_2$. La costruzione di questi aperti è lasciata per esercizio. □

Esercizio 9.9. Sia X il bouquet di $n > 1$ circonferenze. Ogni mappa $f : X \to S^1$ è omotopa ad una mappa costante.

Ricordiamo che uno spazio topologico X è una *varietà topologica* di dimensione n se ogni punto x ha un intorno omeomorfo a B^n.

Proposizione 9.10. *Sia M una varietà di dimensione $n \geqslant 3$, di Hausdorff e connessa per archi. Per ogni punto $x \in M$ abbiamo $\pi_1(M) = \pi_1(M \setminus \{x\})$.*

Dim. Il punto x ha un intorno U omeomorfo a B^n. Prendiamo $X = U \cup V$ con $V = X \setminus \{x\}$ aperto (perché X è di Hausdorff). Quindi $U \cap V$ è omeomorfo a $B^n \setminus \{0\}$, che è a sua volta omeomorfo a $S^{n-1} \times (0,1)$. Poiché $n \geqslant 3$, gli aperti U e $U \cap V$ sono semplicemente connessi. La tesi segue dal Teorema di Van Kampen e dalla Proposizione 9.2. □

Proposizione 9.11. *Abbiamo:*

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1, \\ \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad \pi_1(\mathbb{CP}^n) = \{e\}.$$

Dim. Sappiamo che $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, e quindi $\pi_1(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{Z}$. Per $n \geqslant 2$, la mappa $S^n \to \mathbb{RP}^n$ che manda $(x_1, \ldots, x_n)$ in $[x_1, \ldots, x_n]$ è un rivestimento a due fogli. Quindi $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ ha due elementi, e l'unico gruppo con due elementi è $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Sappiamo che $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, e quindi $\pi_1(\mathbb{CP}^1) = \{e\}$. Mostriamo quindi che $\mathbb{CP}^n$ è semplicemente connesso per induzione su n, supponendo $n > 1$. Poniamo $X = \mathbb{CP}^n \setminus \{[1, 0, \ldots, 0]\}$. Lo spazio $\mathbb{CP}^n$ è una varietà di dimensione $2n \geqslant 4$, e per la proposizione precedente abbiamo $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = \pi_1(X)$. Sia $P \subset \mathbb{CP}^n$ l'iperpiano

$$P = \{[z_0, \ldots, z_n] \mid z_0 = 0\}.$$

Consideriamo la funzione $f : X \to P$ data da $f([z_0, \ldots, z_n]) = [0, z_1, \ldots, z_n]$. La funzioni f e l'inclusione $i : P \to X$ definiscono una equivalenza omotopica tra X e P. Infatti $f \circ i = \mathrm{id}_P$ e $i \circ f \sim \mathrm{id}_X$ tramite l'omotopia

$$\begin{array}{rcl} F : X \times [0,1] & \to & X \\ \big([z_0, \ldots, z_n], t\big) & \mapsto & [tz_0, z_1, \ldots, z_n] \end{array}$$

Quindi $\pi_1(X) \cong \pi_1(P)$, ma P è omeomorfo a $\mathbb{CP}^{n-1}$ e quindi abbiamo concluso. $\square$