TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Primo scritto: 12 giugno 2006

Esercizio 1. Siano P e Q due punti distinti del piano $\mathbb{R}^2$, e sia X lo spazio topologico quoziente $X = \mathbb{R}^2/_\sim$, dove

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } \{x, y\} = \{P, Q\}.$$

(i) Mostrare che X è connesso per archi.

(ii) Determinare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$$X := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 = 1\right\}, \quad Y := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\right\}$$

e sia $Z := \mathbb{R}^3 \setminus (X \cup Y)$.

(i) Mostrare che Z è connesso per archi.

(ii) Determinare il gruppo fondamentale di Z.

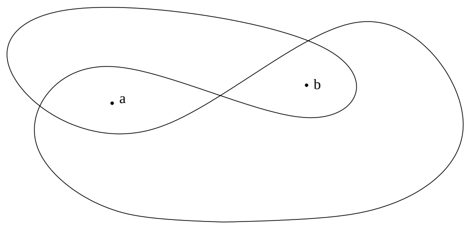
(iii) Mostrare che Z ammette rivestimento universale $p\colon Z' \to Z$. Qual è il grado di p?

Esercizio 3. Sia $r > 0$ e $f\colon B_r(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che

$$|f(z)| < |z|^{-1/2} \quad \text{per ogni } z \in B_r(0) \setminus \{0\}.$$

Stabilire se 0 è una singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale per f.

Esercizio 4. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e consideriamo il cammino chiuso γ in $U := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ come in figura:



Sia z_0 il punto iniziale di γ.

(i) Descrivere la classe di γ in $\Pi_1(U, z_0)$.

(ii) Mostrare che per ogni funzione f olomorfa su U si ha

$$\int_\gamma f = 0.$$