TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Quinto scritto a.a. 05/06: 17 gennaio 2007

Esercizio 1. Sia $X = GL(n, \mathbb{C})$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ con determinante non nullo, con la topologia indotta da $\mathbb{C}^{n^2}$.

1. Trova un sottoinsieme $Y \subseteq X$ omeomorfo a S^1, che sia un retratto di X.
2. Mostra che $\Pi(X, x)$ è infinito per ogni $x \in Y$.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}^n / \sim$ dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza data da

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \text{ oppure } x = -y.$$

1. Mostra che X è connesso per archi.
2. Mostra che X è contrattile.

Esercizio 3. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e sia $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che:

$$|f(z)| < \frac{1}{|z|} \quad \text{per ogni} \quad z \in \Delta,\ z \neq 0.$$

1. Siano $r \in (0, 1)$ e $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \leq r$. Mostra che
$$|f(z)| < \frac{1}{r}.$$
2. Mostra che $|f(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \Delta$.
3. Sia $g\colon \Delta \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $g(0) = 0$ e $g(\Delta) \subseteq \Delta$. Mostra che $|g(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \Delta$.
(*Suggerimento: studia la funzione* $\frac{g(z)}{z}$.)

Esercizio 4. Scrivi una funzione olomorfa su Δ non costante con infiniti zeri.