TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Sesto scritto a.a. 05/06: 7 febbraio 2007

Esercizio 1. Sia S^2 la sfera di raggio unitario in $\mathbb{R}^3$ e consideriamo l'insieme

$$X = S^2 \cup \{(0,0,z) \mid z \in [-1,1]\}$$

con la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

Mostra che X è connesso per archi e calcola il suo gruppo fondamentale.

Esercizio 2. Siano X e Y due spazi topologici, entrambi omeomorfi al piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$, e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ due punti. Sia quindi Z lo spazio ottenuto identificando x_0 e y_0:

$$Z = (X \cup Y)/_\sim \quad \text{con } a \sim b \Longleftrightarrow a = b \text{ oppure } \{a,b\} = \{x_0, y_0\}.$$

Mostra che Z ammette un rivestimento universale $p : \tilde{Z} \to Z$, e che il grado di p è infinito.

Esercizio 3. Siano $U, U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{C}$ degli aperti tali che $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ e

$$(U_1 \cup \cdots \cup U_i) \cap U_{i+1} \text{ è connesso per ogni } i = 1, \ldots, n-1.$$

Sia f una funzione olomorfa su U che ammette primitiva su U_i per ogni $i = 1, \ldots, n$. Mostra che f ammette primitiva su U.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Supponiamo che esistano due numeri reali $a, b \neq 0$ tali che

$$f(z) = f(z+a) = f(z+ib)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. Mostra che f è costante.