TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Primo compito a.a. 06/07: 15 giugno 2007

Esercizio 1. Sia X lo spazio topologico

$$X = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; z \neq 0, z \neq 1, z \neq w\right\}$$

Mostrare che X non è omeomorfo a $\mathbb{C}^2$.

Esercizio 2. Sia X spazio topologico con rivestimento universale compatto. Sia $Y \to X$ rivestimento non banale. Mostrare che Y e X non sono omeomorfi.

(Facoltativo) Il testo è ancora vero se X ha rivestimento universale non compatto?

Esercizio 3. Sia $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1\right\}$. Esiste una funzione olomorfa $f : \Delta \to \mathbb{C}$ suriettiva?

Esercizio 4. Consideriamo l'insieme

$$Z = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}.$$

Sia Ω l'aperto complementare $\Omega = \mathbb{C} \setminus Z$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una fuzione olomorfa, avente un polo in ogni $1/n$ con $n > 0$. Mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste una successione $\{z_i\}$ di punti di Ω con $z_i \to 0$ e $f(z_i) \to \lambda$.