**TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA**

Secondo compito a.a. 06/07: 6 luglio 2007

**Esercizio 1.** Mostra che la superficie disegnata qui sotto in $\mathbb{R}^3$ non è semplicemente connessa.

**Esercizio 2.** Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento di grado 2. Sia $g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ la funzione che associa ad ogni punto $\tilde{x}$ l'altro punto $g(\tilde{x})$ presente nella fibra $p^{-1}(p(\tilde{x}))$ di $p(\tilde{x})$. Mostra che $g$ è un automorfismo del rivestimento.

**Esercizio 3.** Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e

$$f_n : \Delta_1 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

una funzione olomorfa dipendente da un numero naturale $n$. Supponiamo che $f_n$ converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa

$$f : \Delta_1 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}.$$

Se le $f_n$ hanno tutte una singolarità eliminabile in zero, anche la $f$ ha una singolarità eliminabile in zero? (Motivare la risposta.)

**Esercizio 4.** Si consideri l'integrale curvilineo

$$f(r) = \int_{\gamma_r} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} dz$$

definito sulla curva chiusa $\gamma_r(t) = re^{i\pi t}$. Otteniamo una funzione

$$f : \mathbb{R}_{>0} \setminus \left\{ \frac{1}{k\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{C}$$

1. Mostra che $f$ ha valori reali,
2. Mostra che $f$ è limitata su tutto il dominio.