TOPOLOGIA E ANALISI COMPLESSA

Terzo compito a.a. 06/07: 13 settembre 2007

Esercizio 1. Sia p un intero positivo. Sia $\omega_p = e^{2\pi i/p}$. Si consideri la relazione di equivalenza su

$$S^3 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z|^2 + |w|^2 = 1\right\}$$

data da

$$(z,w) \sim (z',w') \iff z' = \omega_3^i z \text{ e } w' = \omega_3^i w' \text{ per qualche } i.$$

Si consideri lo spazio quoziente $X = S^3/\sim$ dato da questa relazione di equivalenza. Mostrare che:

1. La mappa $p : S^3 \to X$ data dal quoziente è 3-1, cioè la cardinalità di $p^{-1}(x)$ è 3 per ogni x in X.
2. Ogni x in S^3 ha un intorno aperto $U(x)$ in S^3 tale che
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \not\sim x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in U(x).$$
3. p è un rivestimento.
4. X è connesso per archi.
5. X è una varietà topologica.
6. Calcolare $pi_1(X)$.
7. Sia X' definito con lo stesso procedimento, ma con ω_4 al posto di ω_3. Calcolare $\pi_1(X')$.

Esercizio 2. Dire se esistono un aperto Ω del piano complesso, una funzione olomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$, e delle curve semplici chiuse

$$\gamma_n : [0,1] \to \Omega$$

parametrizzate da $n \in \mathbb{N}$, tali che

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\gamma_n} f(z)dz \right| = +\infty.$$

Esercizio 3. Sia C un sottoinsieme chiuso del piano complesso $\mathbb{C}$ con parte interna non vuota. Sia A un sottoinsieme aperto del piano complesso. Mostrare che $\mathbb{C} \setminus C$ è biolomorfo ad un sottoinsieme aperto di A.