Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Terzo compitino, 29/05/2008

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$, sia $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V e siano $v, w \in V$ vettori non nulli.

(i) Dimostrare che se $b(v,v) = b(w,w)$ allora esiste un'isometria $f\colon V \to V$ tale che $f(v) = w$. (Suggerimento: se $b(v,v) = 0$, mostrare innanzi tutto che esiste un sottospazio $S \subset V$ tale che $v \in S$ e la restrizione di b a S è non degenere.)

(ii) Dire, giustificando la risposta, se l'enunciato (i) è vero anche nel caso in cui b sia degenere.

Esercizio 2. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si consideri in $\mathbb{R}^2$ la conica C_t di equazione $(1-2t)x^2 + 2txy + (1-2t)y^2 + 2tx - 4ty - 4t = 0$.

(i) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un'affinità di $\mathbb{R}^2$ che trasforma C_t nella conica di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

(ii) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un'isometria di $\mathbb{R}^2$ che trasforma C_t nella conica di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo (cioè dotato di un prodotto scalare b definito positivo) di dimensione n. Dimostrare che esiste un'isometria $f\colon V \to V$ tale che $b(f(v), v) = 0$ per ogni v se e solo se V ha dimensione pari.