Esercizi di Geometria Superiore 1
15 ottobre 2007

Esercizio 1. Si consideri l'inversione di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto \rho^2 \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} + x_0 \end{aligned}$$

Si dimostri che:

1. Se $H \subset \mathbb{R}^n$ è un iperpiano o una sfera di dimensione k, l'immagine $f(H) \cap \mathbb{R}^n$ è un iperpiano o una sfera di dimensione k.
2. La funzione f è una mappa conforme: è differenziabile in $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, ed il suo differenziale in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ è composizione di una applicazione ortogonale e una omotetia.

Esercizio 2. Mostrare che l'inversione di centro $(0, \ldots, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$ manda isometricamente il semispazio di Poincaré

$$S = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid X_n > 0\right\}$$

con il tensore metrico

$$g = \frac{1}{x_n^2} I$$

nel disco di Poincaré

$$D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \ldots x_n^2 < 1\right\}$$

con il tensore metrico

$$g = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} I.$$

Esercizio 3. Sia $f : \Delta \rightarrow \Delta$ un biolomorfismo di $\Delta = \left\{z \,\big|\, |z| < 1\right\}$, tale che $f(0) = 0$.

- Sia $g(z) = f(z)/z$, olomorfa su $\Delta \setminus \{0\}$. Usando il principio del massimo sul disco $\Delta_r = \left\{z \,\big|\, |z| < r\right\}$, mostrare che $|g(z)| \leq 1/r$.
- Dedurre che $|f(z)| \leqslant |z|$ per ogni z.
- Dedurre che $|f(z)| = |z|$ per ogni z.
- Usando ancora il principio del massimo, dedurre che $f(z) = kz$ con $|k| = 1$.